

Energieforschung Projekt: 101'001 Vertrag: 151'162	Geothermie	Im Auftrag des <b>Bundesamtes für Energie BFE</b>
---	------------	--

**Schlussbericht, Dezember 2005**

# **Erdwärmesonden für Direktheizung**

## ***Phase 1: Modellbildung und Simulation***

ausgearbeitet durch  
Arthur Huber  
Huber Energietechnik AG  
Jupiterstrasse 26  
CH – 8032 Zürich

Erdwärmesonden für Direktheizung Phase I: Modellbildung und Simulation	Geothermie	Im Auftrag des <b>Bundesamtes für Energie BFE</b>
---	------------	--

## Zusammenfassung

Erdwärmesonden werden heute primär im geschlossenen Kreislauf als Wärmequellen für Wärmepumpen eingesetzt. Im Molassegebiet des Schweizerischen Mittellandes ist im ungestörten Erdreich in Tiefen von 400m mit Temperaturen von ca. 24-26 °C zu rechnen. Dies ist die minimale Temperatur, mit der heute ein gut wärmegeprägtes Gebäude mit Strukturheizung auf 20 °C beheizt werden kann (d.h. direkt, ohne eine Wärmepumpe). In einer ersten Etappe soll analytisch untersucht werden, wie eine geschlossene Erdwärmesonde aussehen muss, damit eine minimale Temperatur von 24-26°C aus einer Tiefe von ca. 600 m gefördert werden kann.

Zunächst wurden dazu die grundsätzlichen Unterschiede zwischen untiefen und tiefen Erdwärmesonden dargestellt und daraus abgeleitet Schlussfolgerungen für die notwendigen Rechenmodelle abgeleitet. Aus physikalischer Sicht liegt dabei die Abgrenzung nicht in der Bohrtiefe, sondern im Temperaturniveau, das genutzt werden soll. In der klassischen Erdwärmesonde liegt im Wärmeentzugsfall das Temperatur-Nutzungs-niveau über die ganze Sondentiefe unter dem natürlichen Temperaturniveau des unbeeinflussten Erdreichs, bei den tiefen Erdwärmesonden findet nur im unteren Teil ein Wärmeentzug statt, im oberen Teil verliert die Sonde wieder einen Teil ihrer Wärme ans Erdreich. Entsprechend dieser Definition nutzt die tiefe Erdwärmesonde den geothermischen Wärmefluss aus dem Erdinnern, die untiefe Erdwärmesonde hingegen primär die von der Erdoberfläche im Jahreszeitenverlauf eindringende Wärme ins Erdreich. Aus dieser Erkenntnis heraus wurde die analytische „Erdwärmesondengleichung“ hergeleitet und Regeln für die Anwendbarkeit der Modelle aufgestellt.

Die Umkehrung des Wärmeflusses in tiefen Erdwärmesonden erzwingt im Simulationsbereich auch den Einsatz eines Modells, bei dem das Erdreich in horizontale Erdschichten unterteilt werden kann. Dabei sollen die Stoffwerte der Sonde und Hinterfüllung in den einzelnen Schichten unterschiedlich berechnet werden können. Aus diesem Grund wurde das Simulationsprogramm EWS (Huber, Schuler, 1997) entsprechend angepasst.

Die Berechnungen zeigen, dass bei 600 m tiefen Erdwärmesonden (50mm Duplex) Quellentemperaturen von maximal 19°C erreicht werden können. Durch eine unterschiedliche Hinterfüllung im unteren und im oberen Teil der Sonde lässt sich die Quellentemperatur um maximal 2°C erhöhen. Diese Massnahme verringert den Wärmetransport vom unteren Teil des Erdreichs in die oberen Erdschichten und führt so im oberen Erdreich zu einem grösseren Temperaturgradienten zur Sonde hin. Durch eine höhere Sondenexzentrizität lässt sich die Quellentemperatur bis maximal 1 °C erhöhen. Mit Koaxialsonden in der gleichen Bohrung hingegen lassen sich bei Bohrtiefen von 600 m Quellentemperaturen von 25 – 26 °C erreichen. Im Gegensatz zur Doppel-U-Sonde ist die Koaxialsonde mit der notwendigen, guten thermischen Ankopplung ans Erdreich aber noch weiter weg von der technischen Realisierbarkeit.

Eine Wirtschaftlichkeitsbetrachtung zeigt, dass selbst bei idealen Bohrverhältnissen mit rund 45% Mehrkosten gegenüber konventionellen, untiefen Erdwärmesonden mit Wärmepumpe zu rechnen ist. Es ist denkbar, dass die künftige Bohrtechnik diese Mehrkosten wesentlich verringern wird. Eine Warmwasserproduktion ohne Wärmepumpe wird mit dieser Technik aber nicht realisierbar. Trotzdem wird der Trend zu tieferen Bohrungen sicher anhalten, da damit höhere Quellentemperaturen und damit wesentlich bessere Wirkungsgrade bei Wärmepumpen ermöglicht werden. In diesem Sinne sollen die Anstrengungen zu dieser Arbeit verstanden werden.

## Abstract

So far, vertical borehole heat exchangers are mainly applied in closed loops as heat sources for heat pumps. In a depth of 400 m in the Swiss Molasse Basin, the undisturbed ground temperature is expected to be some 24 to 26 °C. This is the minimal temperature level required for heating a good insulated building equipped with a structure heating system (directly, without a heat pump). In a first step, the goal is to examine analytically how a closed vertical borehole heat exchanger has to be engineered to deliver heating temperatures of 24 to 26 °C out of a depth of 600 m.

In the analytical part of this report, the main differences between deep and shallow boreholes are displayed. Conclusions for the required mathematical models are derived. It is showed that not the borehole depth but the applied temperature level is the prominent difference between deep and shallow boreholes. Using a classical borehole heat exchanger for heating, the applied temperature level is lower than the temperature level of the undisturbed ground. On the other hand, in deep boreholes the heat extraction only takes place in the lower part, in the upper part, the borehole heat exchanger loses heat into the ground. Accordant to this definition, a deep vertical borehole is using the geothermic heat flow out of the earth's core while shallow boreholes use heat that entered into the ground during summer time from the surface. Out of this cognition, the analytically "vertical borehole equation" was derived and rules for the model's applicability were made.

The reversal of the heat flow in the upper part of deep boreholes enforces the application of models which allow the simulation of different horizontal layers in the ground. In addition, the model has to calculate the material values of the borehole and of the backfilling material differently. In this account, the simulation software EWS (Huber, Schuler, 1997) was adapted accordingly.

The results of the computations show that 600 m deep boreholes (50 mm duplex) can deliver maximum temperatures of 19 °C. By using different backfilling materials in the upper and the lower part of the borehole, the source temperature can be raised by 2 °C. This method reduces the heat flow from the lower to the upper part of the ground and causes a larger temperature gradient in the upper part towards the borehole. By choosing a vertical borehole with higher eccentricity, the source temperature can be raised by some 1 °C. Using coaxial boreholes of 600 m depth, source temperatures of 25 to 26 °C can be achieved. In contrast to the double U-pipe, the coaxial borehole with its necessarily good thermal connection to the ground is farther away from the technical feasibility.

## Résumé

Présent des sondes géothermiques sont utilisées surtout dans le cycle fermé comme sources de chaleur pour des pompes à chaleur. Dans le bassin molassique suisse, on s'attend à des températures d'environ 24-26°C dans des profondeurs de 400 m. C'est la température minimale, avec laquelle un bâtiment avec une bonne isolation thermique et un chauffage structurel peut être chauffé à 20°C (c.-à-d. directement, sans une pompe à chaleur).

Dans une première étape, on examine analytiquement, comme une sonde géothermique fermée doit paraître, afin qu'une température minimale de 24-26°C d'une profondeur d'environ 600 m puisse être tirée.

D'abord, les différences fondamentales entre sondes géothermiques peu profondes et profondes sont représentées et des conclusions pour les modèles nécessaires sont dérivées. Du point de vue physique, la délimitation y ne se trouve pas dans la profondeur du forage, mais dans le niveau de température qui est utilisé.

Conformément à cette définition, la sonde géothermique profonde utilise toutefois d'abord le fleuve de chaleur géothermique de l'intérieur de la terre. Par contre, la sonde géothermique peu profonde utilise la chaleur pénétrant de la surface terrestre. L'équation de la sonde géothermique analytique est déduite de cette constatation et on établis des règles pour l'applicabilité des modèles.

Le renversement du fleuve de chaleur dans les sondes géothermiques profondes impose aussi l'application d'un modèle dans le secteur de simulation, avec lequel le sol peut être subdivisé en couches de terre horizontales. Les valeurs de matière de la sonde et le remplissage doivent être calculées différemment dans les différentes couches. Pour cette raison, le programme de simulation EWS (Huber, Schuler, 1997) a été adapté.

Les calculs montrent qu'avec des sondes géothermiques de 600 m (50mm duplex) on peut atteindre des températures de source au maximum de 19°C. Par un remplissage différent dans la partie inférieur et supérieur de la sonde, la température de source peut augmenter au maximum 2°C. Par une excentricité de sonde plus élevée, la température de source peut être augmentée en plus 1°C.

En utilisant une sonde coaxiale on peut atteindre des températures de 25 - 26°C avec des profondeurs de forage de 600m. Contrairement à la sonde double-U, la sonde coaxiale avec le raccord thermique nécessaire est toutefois encore plus loin de la réalisation technique.

## Verdankungen

Das Projekt „Erdwärmesonden für Direktheizung“ wurde begleitet von Dr. Harald Gorhan (Programm-Leiter Geothermie des Bundesamtes für Energie, BFE), Hr. Stefan Berli (Foralith AG), Hr. Michael Menzl (Haka Gerodur AG) und Hr. Ernst Rohner (Geowatt AG). Ihre engagierte Mitarbeit zu dieser Arbeit sei an dieser Stelle herzlich verdankt.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung .....</b>	<b>1</b>
1.1	Projektziele.....	1
1.2	Resultate .....	2
<b>2</b>	<b>Untiefe und tiefe Erdwärmesonden .....</b>	<b>3</b>
2.1	Untiefe Erdwärmesonden.....	3
2.2	Tiefe Erdwärmesonden .....	5
<b>3</b>	<b>Theorie zur Erdwärmesonden - Berechnung .....</b>	<b>7</b>
3.1	Wärmeleitungsgleichung und Sprungantwort g .....	7
3.1.1	Wärmeleitungsgleichung .....	7
3.1.2	Der radiale Temperatur-Trichter .....	7
3.1.3	Dimensionslose Temperatursprungantwort g .....	8
3.1.4	Grundsätzliche Unterschiede zwischen tiefen und untiefen Erdwärmesonden .....	10
3.1.5	Vergleich der Modelle .....	10
3.2	Die Bohrlochtemperatur $T_b$ und die Fluidtemperatur $T_f$ .....	11
3.2.1	Die Fluidtemperatur $T_f$ .....	12
3.3	Thermische Widerstände $R_a$ und $R_b$ in der Doppel-U-Sonde.....	12
3.3.1	Internen Bohrlochwiderstandes $R_a$ nach Hellström (1991).....	14
3.3.2	Bohrlochwiderstandes $R_b$ nach Hellström (1991).....	14
3.3.3	Erreichbare Werte für die thermischen Widerstände $R_a$ und $R_b$ .....	15
3.4	Erdwärmesondengleichung für Doppel-U-Sonden .....	16
3.5	Temperaturen im Sondenfluid bei Doppel-U-Sonden.....	17
3.6	Thermische Widerstände $R_a$ / $R_b$ an der Koaxialsonde.....	18
3.6.1	Modellierung des internen Bohrlochwiderstandes $R_a$ .....	18
3.6.2	Modellierung des Bohrlochwiderstandes $R_b$ .....	18
3.6.3	Erreichbare Werte für die thermischen Widerstände $R_a$ und $R_b$ .....	19
<b>4</b>	<b>Erweiterungen im Programm-Modul EWS .....</b>	<b>20</b>
4.1	Rechengitter .....	20
4.2	Thermische Widerstände $R$ und Leitfähigkeiten $L$ .....	21
4.3	Wärmeübergangskoeffizient $\alpha$ beim Betrieb der Erdwärmesonde .....	22
4.4	Modell für Doppel – U- Sonden.....	23
4.4.1	Stationäre Berechnung der Sole:.....	24
4.4.2	Instationäre Berechnung der Sole: .....	24
4.5	Modell für Koaxial – Sonden .....	25
4.5.1	Stationäre Berechnung der Sole.....	25
4.5.2	Instationäre Berechnung der Sole: .....	26
<b>5</b>	<b>Rechenresultate .....</b>	<b>27</b>
5.1	Erreichbare Werte an der homogenen Doppel-U-Sonde.....	27
5.1.1	Erreichbare Temperaturen, berechnete mit der Erdwärmesondengleichung.....	27
5.1.2	Erreichbare Rücklauftemperaturen, berechnete mit der Erdsondengleichung .....	28
5.1.3	Erreichbare Temperaturen, berechnete mit dem EWS-Modul (10 Schichten).....	29
5.1.4	Erreichbare Rücklauftemperaturen, berechnete mit dem EWS-Modul .....	30
5.1.5	Wärmeleitfähigkeiten der Hinterfüllung $\lambda_{Fill}$ .....	31
5.1.6	Rechenergebnisse mit Programm EWS in homogenen Doppel – U - Sonden .....	31
5.1.7	Asymmetrische Sondenrohr-Anordnung.....	32
5.2	Inhomogene Doppel-U-Sonden .....	33
5.2.1	Inhomogene Hinterfüllung.....	33
5.2.2	Einfluss der Entzugsleistung.....	35
5.2.3	Isolierte Sondenrohre.....	36
5.2.4	Instationäres Verhalten (Anfahrverhalten tiefer Erdwärmesonden) .....	37
5.3	Erreichbare Temperaturen bei Koaxialsonden .....	39

<b>6</b>	<b>Machbarkeit und Bohrschema</b>	<b>41</b>
6.1	Koaxialsonden	41
6.2	Doppel-U-Sonden	42
6.2.1	Bohr- und Verrohrungsschema für 600m tiefe Duplex-Sonde 50 mm	42
<b>7</b>	<b>Wirtschaftlichkeit</b>	<b>43</b>
7.1	Randbedingungen	43
7.1.1	Gebäude	43
7.1.2	Wirtschaftliche Randbedingungen	43
7.2	Vergleichsvariante mit Wärmepumpe	43
7.3	Direktheizsonde ohne Wärmepumpe	44
7.4	Vergleich und Schlussfolgerungen	44
<b>8</b>	<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>45</b>
8.1	Lateinische Symbole	45
8.2	Griechische Symbole	46
<b>9</b>	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>47</b>
<b>10</b>	<b>Anhang</b>	<b>48</b>
10.1	Eingabeparameter für die Berechnungen im Programm EWS	48
10.1.1	Berechnungsbeispiel für 600m tiefe Koaxialsonden	48
10.1.2	Berechnungsbeispiel für 600m tiefe, inhomogene Doppel-U-Sonde	49
10.2	Quellcode für die Programm-Anpassungen im Modul EWS	50
10.2.1	Quellcode für den Wärmeübergang $\alpha$ Fluid - Sondenrohr	50
10.2.2	Quellcode für die Berechnung der Bohrlochwiderstände $R_a$ und $R_b$	51
10.2.3	Quellcode für die Integration der Bohrlochwiderstände $R_a$ und $R_b$	52
10.2.4	Quellcode für die Berechnung der äusseren Randbedingungen	52
10.2.5	Quellcode für die Berechnung des Sondenfluids	53
10.3	Stoffwerte	54
10.4	Dimensionslose Temperatursprungantworten (g-functions)	55
10.5	Herleitung der Erdwärmesondengleichung für Duplex-Sonden	56
10.5.1	Konstanter, spezifischer Wärmeentzug $q$	57
10.5.2	Konstante Bohrlochtemperatur $T_b$	59

# 1 Einleitung

## 1.1 Projektziele

Erdwärmesonden werden heute primär im geschlossenen Kreislauf als Wärmequellen für Wärmepumpen eingesetzt. Im Molassegebiet des Schweizerischen Mittellandes ist im ungestörten Erdreich in Tiefen von 400m mit Temperaturen von ca. 24-26 °C zu rechnen. Dies ist die minimale Temperatur, mit der heute ein gut wärmegeämmtes Gebäude mit Strukturheizung auf 20 °C beheizt werden kann (d.h. direkt, ohne eine Wärmepumpe). In einer ersten Etappe soll rechnerisch untersucht werden, wie eine geschlossene Erdwärmesonde aussehen muss, damit eine minimale Temperatur von 24-26°C aus einer Tiefe von 500-600 m gefördert werden kann. Dabei muss berücksichtigt werden, dass Erdwärmesonden, die ein Temperaturniveau nutzen, das über dem Jahresmittel der Erdoberfläche liegt, keine Regeneration des Erdreichs von oben mehr möglich ist, wie dies in untiefen Erdwärmesonden der Fall ist:

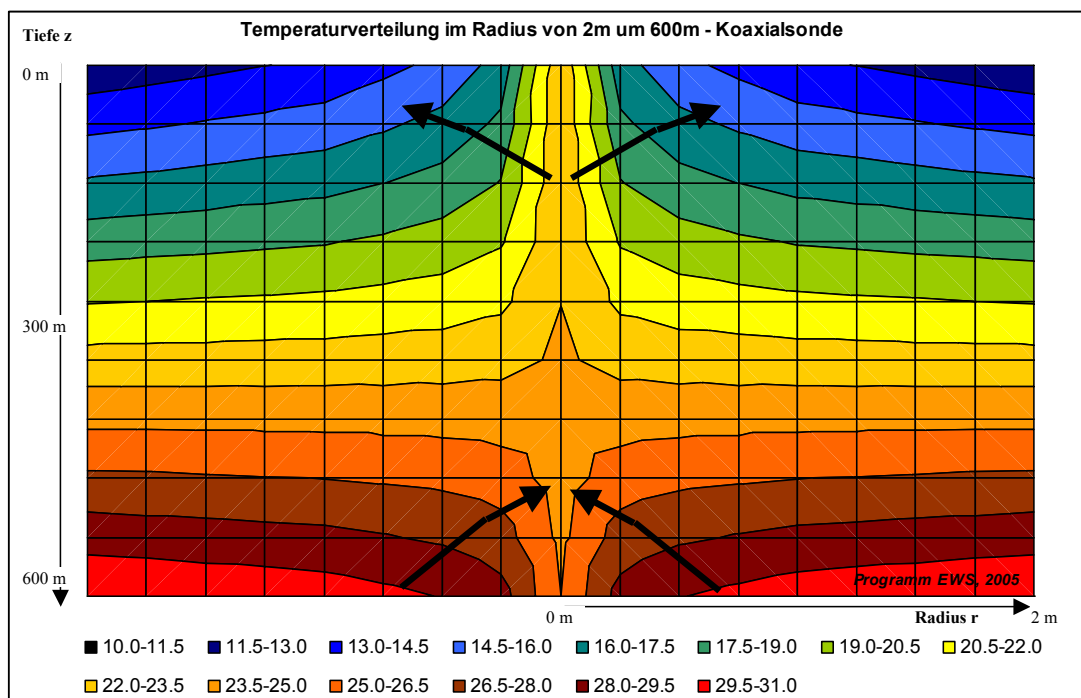


Abb. 1.1 Temperaturverteilung und Wärmefluss im Erdreich mit  $\lambda_{\text{Erde}} = 2.6 \text{ W/mK}$  um eine 600m tiefe Koaxialsonde mit Sondendurchsatz = 0.8 kg/s, Wärmeentzug 5kW nach 31 Tagen Dauerentzug. Oberflächentemperatur  $T_{\text{mo}} = 11^\circ\text{C}$  mit einem Temperaturgradienten  $\Delta T_{\text{Grad}} = 0.035 \text{ K/m}$ . Die Berechnung wurde durchgeführt mit dem Programm EWS.

Für diese Untersuchung soll das im Auftrag des Bundesamtes für Energie entwickelte Programm-Modul EWS angepasst werden (Huber, Pahud, 1999). EWS rechnet in axialer Richtung mehrschichtig und ist deshalb für diese Rechnungen prädestiniert. Für die Untersuchung muss das Programm-Modul so angepasst werden, dass die Stoffwerte und Randbedingungen für jede Schicht unterschiedlich vorgegeben werden können (unterschiedliche Hinterfüllung und thermische Widerstände  $R_a$  und  $R_b$  pro Schicht).

Mit einer Kosten-Nutzenanalyse soll die Wirtschaftlichkeit von tieferen Erdwärmesonden in Abhängigkeit des Strompreises und der möglichen Preisentwicklung bei der Bohrung untersucht werden. Dabei sollen auch die neuen Bohrtechniken mit einfließen.



## 1.2 Resultate

In einem ersten Teil der Arbeiten wurden analytische Modelle aufgestellt, mit denen Erdwärmesonden berechnet werden können. Dabei wurde die Erdwärmesondengleichung für Doppel-U-Sonden hergeleitet, mit der relativ einfach die Quelltemperatur (Fluidtemperatur am Sondaustritt) ohne aufwendige Simulationen berechnet werden kann. Ausserdem wurde gezeigt, dass auch die Fluidtemperatur über die ganze Sondentiefe relativ einfach analytisch berechnet werden kann. Im Anhang des Berichtes werden aber auch die Grenzen für den Einsatz dieser Modelle aufgezeigt.

Die durchgeführten Untersuchungen haben gezeigt, dass für tiefe Erdwärmesonden einfache, einschichtige Rechenmodelle und analytische Ansätze an ihre Grenzen stossen und mehrschichtige Rechenmodelle anzuwenden sind. Dies deshalb, weil bei tiefen Erdwärmesonden ein Wärmetransport von den unteren in die oberen Erdschichten stattfindet und dieser Prozess nur mit einem mehrschichtigen Modell wie z. B. dem EWS-Modul korrekt abgebildet werden kann. Dieser Wärmetransport führt aber auch dazu, dass sich in den oberen Erdschichten der natürliche Temperaturgradient um die Erdwärmesonden verringert und so eine „isolierende“ Wirkung einstellt. Die wärmedämmende Hinterfüllungen im oberen Sondenbereich bringt deshalb nur eine beschränkte, unter den Erwartungen liegende Temperaturerhöhung der Quelltemperatur.

Im Vergleich zwischen Koaxialsonden und Doppel-U-Sonden führt die Koaxialsonde zu ca. 4°C-6°C höheren Quelltemperaturen. Damit lassen sich bei 600m Bohrtiefe bis zu 26°C Quelltemperatur erreichen. Dies setzt aber eine Konstruktion ohne thermischen Kontaktwiderstand voraus, was aus heutiger Sicht mit den gängigen Bohrschemata nur mit sehr grossem Aufwand realisierbar ist. Dazu ist eine Hinterfüllung im unteren Drittel der Sonde notwendig. Realistischerweise ist dies nur mit einem Zementationsschuh möglich, was eine relativ teure Lösung darstellt.

Besser sieht die Realisierbarkeit von 600m tiefen Doppel-U-Sonden aus. Machbarkeitsabklärungen der Firma Haka-Gerodur AG zeigen für 50mm Duplex-Sonden positive Resultate. Im geologisch günstigsten Fall lässt sich eine solche Bohrung im unteren Teil auch ohne Verrohrung und damit ohne einen zusätzlichen Kontaktwiderstand realisieren. Die maximalen Quelltemperaturen für 600m tiefe Doppel-U-Sonden liegen aber nur zwischen 19°C und 20°C.

Mit einer differenzierten Hinterfüllung (unten mit guter, oben mit schlechter Wärmeleitfähigkeit) lässt sich die Quelltemperatur erhöhen. Um diesen Effekt berechnen zu können, wurde das EWS-Modul angepasst. Neu sind nun in jeder horizontalen Erdschicht unterschiedliche Bohrlochwiderstände berechenbar. Für die Berechnung der Bohrlochwiderstände wurden neu die Modelle von Hellström (1991) ins Programm-Modul implementiert.

Die Berechnung mit diesen neuen Modellen hat ergeben, dass mit einer inhomogenen Hinterfüllung (oben schlechte, unten gute Wärmeleitfähigkeit) die Quelltemperatur um maximal 2°C erhöht werden kann. Dies ist allerdings in den meisten Fällen immer noch zu wenig für eine Direktheizung eines Wohngebäudes.

## 2 Untiefe und tiefe Erdwärmesonden

### 2.1 Untiefe Erdwärmesonden

Eine mögliche Definition für den Begriff der untiefen Erdwärmesonden liegt in der Herkunft der Wärme im Gleichgewichtszustand zwischen Wärmeentzug aus dem Erdreich und nachströmender Wärme. Im Gleichgewichtszustand fliesst **im Jahresdurchschnitt** die gleiche Energiemenge, die mit einer Erdwärmesonde dem Erdreich entzogen wird von oben oder von unten wieder nach, es findet somit keine weitere Auskühlung der Erde mehr statt und der „Temperaturtrichter“ im Erdreich vergrössert sich radial auch nicht mehr. [Huber, Pahud, 1999a].

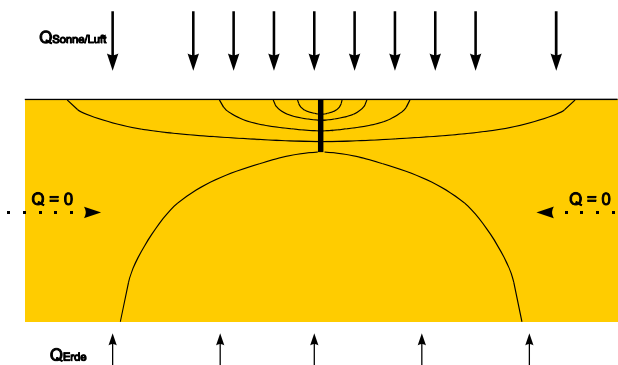


Abb. 2.1 Wärmeflusslinien für Einzelsonden im Gleichgewichtszustand im Jahresmittel (ohne Jahreszeiten-Transienten) bei untiefen Erdwärmesonden.

Liegt die Temperatur des Sondenfluids beim Wärmeentzug immer unter der Jahresmitteltemperatur der Erdoberfläche, so kommt die nachströmende Wärme im Gleichgewichtszustand primär von der Erdoberfläche und wir sprechen von untiefen Erdwärmesonden. Die untiefe Erdwärmesonde nutzt somit primär die **saisonal gespeicherte Sonnenenergie**, die bedingt durch den „Temperaturtrichter“ im Sommer zu einem zusätzlichen Wärmefluss von der Erdoberfläche ins Erdreich führt und im Winterhalbjahr dem Erdreich wieder entzogen wird.

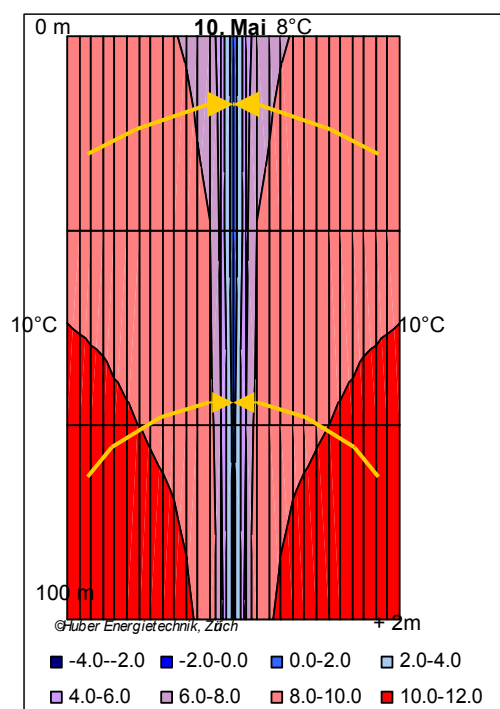


Abb. 2.2 Wärmeflusslinien beim Wärmeentzug, berechnet mit Programm EWS

Die Nutzung der untiefen Erdwärmesonde würde somit selbst dann funktionieren, wenn der Erdkern aus Eis bestehen würde! Die untiefe Erdwärmesonde ist auch nicht zwingend auf den eher geringen, geothermischen Wärmefluss aus dem Erdinneren angewiesen, wobei dieser die Leistungsfähigkeit einer Sonde durchaus erhöhen kann. Abb. 2.1 zeigt die Wärmeflusslinien im Jahresmittel ohne die Jahreszeiten – Transienten. Beim Wärmentzug der Sonde sind diese überlagert und führen im Sonden-nahbereich zu der Temperaturverteilung und den Wärmeflusslinien aus Abb. 2.2. Dargestellt ist das Erdreich in einem Radius von 2m um eine Sonde von 100m Tiefe, berechnet für ein typisches Einfamilienhaus-Entzugsprofil mit dem Programm-Modul EWS [Huber, Schuler, 1997]. Abb. 2.3 (Programm Cosond) und Abb. 2.4 (Programm Fracture) zeigen ein analoges Bild für die Wärmeflusslinien.

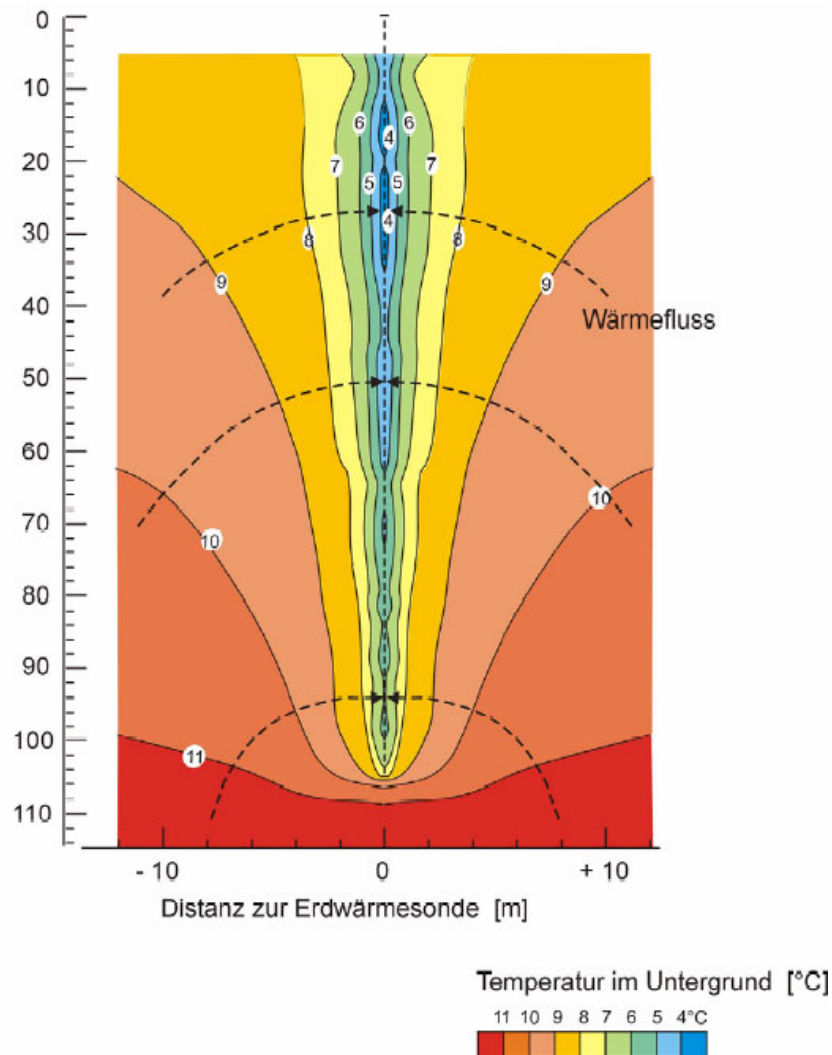


Abb. 2.3 Wärmefflusslinien beim Wärmeentzug, Anlage Elgg am kältesten Wintertag, berechnet mit dem Programm Cosond [Eugster, 1998]. Zu beachten ist die unterschiedliche Skala in x- und z-Richtung.

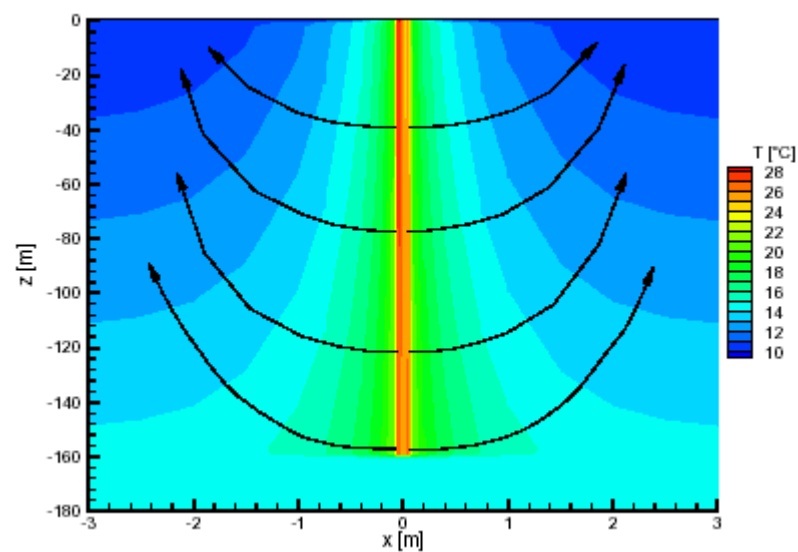


Abb. 2.4 Wärmefflusslinien bei einer 160m tiefen Erdwärmesonde bei einem Response-Test mit Wärmeeintrag, berechnet mit dem Programm Fracture [Signorelli, 2004].

## 2.2 Tiefe Erdwärmesonden

Im vorliegenden Projekt soll das Verhalten von Erdwärmesonden untersucht werden, mit denen Quellentemperaturen von 24-25°C erreicht werden können, um damit ein Gebäude direkt, ohne die Hilfe einer Wärmepumpe, beheizen zu können. Diese Temperaturen liegen deutlich über den Jahres-Durchschnittstemperaturen der Erdoberfläche. Mit diesen „Tiefen Erdwärmesonden“ wird somit im Gleichgewichtszustand nicht mehr die Sonnenenergie, sondern ausschliesslich der **geothermische Wärmefluss aus dem Erdinnern** genutzt. Abb. 2.5 zeigt diesen geothermischen Wärmefluss in der Schweiz nach Medici und Rybach [1995].

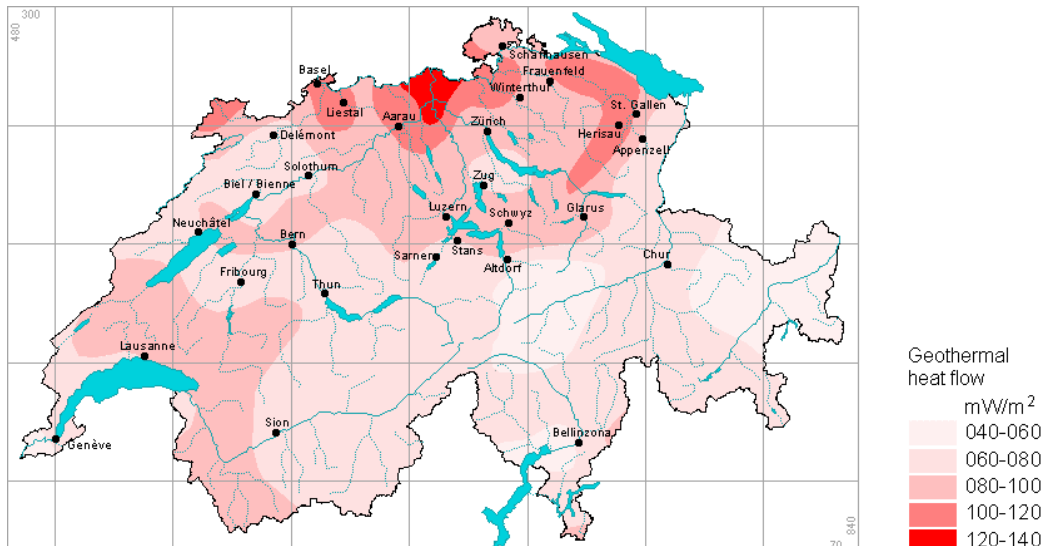


Abb. 2.5 Geothermischer Wärmefluss der Schweiz nach Medici, Rybach [1995].

Der geothermische Wärmefluss  $q_{\text{geo}}$  ergibt sich aus der Temperaturzunahme mit der Tiefe  $\Delta T_{\text{Grad}}$  und der Wärmeleitfähigkeit der Erde  $\lambda_{\text{Earth}}$  aus der Beziehung

$$\dot{q}_{\text{geo}} = \lambda_{\text{Earth}} \cdot \Delta T_{\text{Grad}} \quad [\text{W} / \text{m}^2] \quad \text{Gl. 2.1}$$

Für die Stadt Zürich zum Beispiel ergibt sich aus Abb. 2.5 ein geothermischer Wärmefluss von ca. 0.085 W/m<sup>2</sup>. Die hier anzutreffenden, typischen Gesteinschichten der Oberen Süsswassermolasse OSM (cf Abb. 2.6 und Abb. 2.7) haben eine Wärmeleitfähigkeit von 2.5 – 2.7 W/mK. Aus Gl. 2.1 ergibt sich damit ein Temperaturgradient für Zürich von ca. 0.033 K/m.

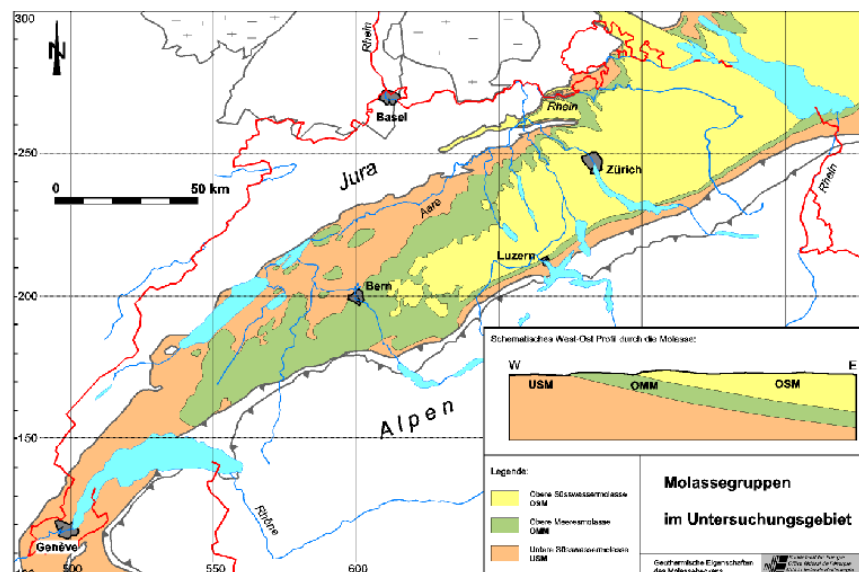


Abb. 2.6 Verteilung der Tertiärschichten im Schweizerischen Mittelland nach Leu et al. (1999).

OSM: Obere Süsswassermolasse, OMM: Obere Meeresmolasse, USM: Untere Süsswassermolasse

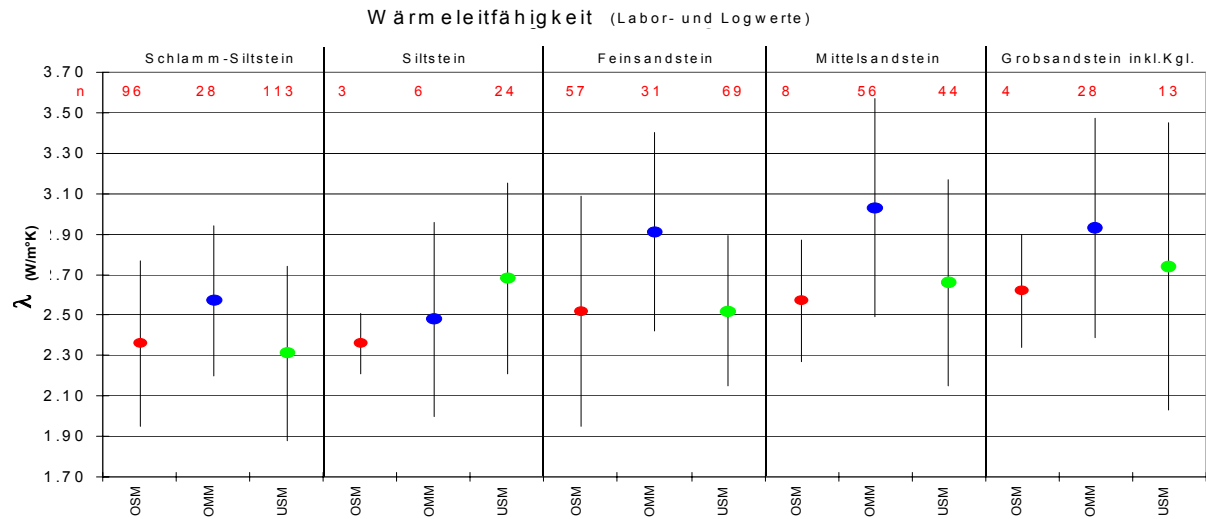


Abb. 2.7 Stoffwerte des Bodens im Molassebecken des Schweizerischen Mittellandes nach Leu et al. (1999).

Die Temperatur des ungestörten Erdreichs  $T_m$  in der Tiefe  $z$  kann aus der mittleren Temperatur der Erdoberfläche  $T_{mo}$  und dem Temperaturgradienten  $\Delta T_{Grad}$  berechnet werden mit

$$T_m(z) = T_{mo} + z \cdot \Delta T_{Grad} \quad \text{Gl. 2.2}$$

In Gl. 2.2 sind die überlagerten Jahreszeiten-Transienten nicht berücksichtigt. Diese sind bis zur Eindringtiefe von ca. 10m Tiefe sichtbar.

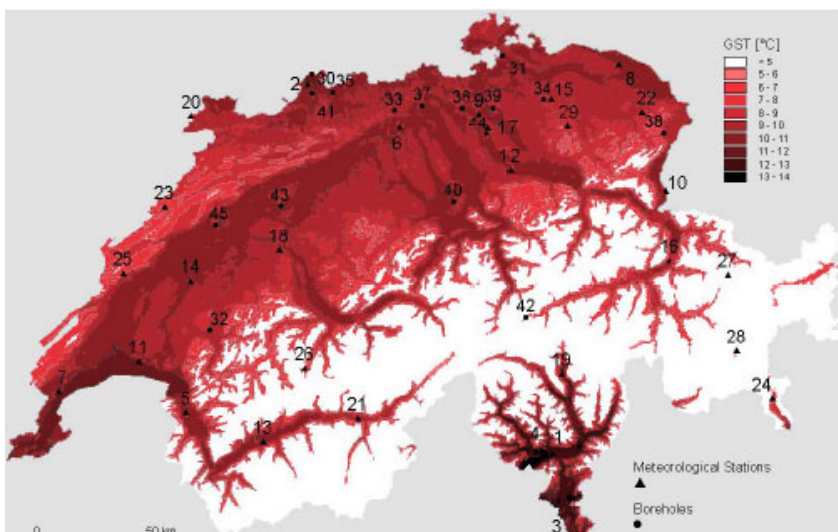


Abb. 2.8 Mittlere Oberflächentemperaturen  $T_{mo}$  der Schweiz nach Signorelli [2004].

Um die mittlere, ungestörte Erdreichtemperatur in der Tiefe  $z$  zu bestimmen, ist also zusätzlich die Kenntnis der mittleren Temperatur der Erdoberfläche  $T_{mo}$  notwendig. Nach Signorelli [2004] liegt diese im Mittel im Schweizerischen Mittelland unter 1000 Meter Meereshöhe ca.  $1.4^\circ\text{C}$  über der mittleren Jahreslufttemperatur, wobei der Schwankungsbereich zwischen  $0.8^\circ\text{C}$  im ländlichen Bereich und  $2^\circ\text{C}$  im städtischen Bereich liegen kann.

$$\begin{aligned} T_{mo} &= \overline{T}_{Luft} + 1.4^\circ\text{C} && \text{Im Durchschnitt in der Schweiz, unter 1000 m. ü. M.} \\ T_{mo} &= \overline{T}_{Luft} + 0.8^\circ\text{C} && \text{Im bewachsenen, beschatteten Umfeld} \\ T_{mo} &= \overline{T}_{Luft} + 2.0^\circ\text{C} && \text{Im überbauten, städtischen Umfeld} \end{aligned} \quad \text{Gl. 2.3}$$

Mit der Höhe über Meer  $Z$  gibt kann nach Signorelli [2004]  $T_{mo}$  auch berechnet werden mit

$$T_{mo} = 15.23 - 1.08 \cdot 10^{-2} \cdot Z + 5.61 \cdot 10^{-6} \cdot Z^2 - 1.5 \cdot 10^{-9} \cdot Z^3 \quad [^\circ\text{C}] \quad \text{Gl. 2.4}$$

Wie Hopkirk, Rybach und Stadler [1994] festgestellt haben, liegt die wirtschaftlich interessanteste Bohrtiefe für Tiefe Erdwärmesonden bei 500 – 1000m, da in diesem Bereich tiefe Sonden mit leichten Bohrgeräten am wirtschaftlichsten abgeteuft werden können. Die Temperaturen in dieser Tiefe liegen für Zürich mit Gl. 2.1, Gl. 2.2 und Gl. 2.3 im Bereich von  $28 - 45^\circ\text{C}$ .

## 3 Theorie zur Erdwärmesonden - Berechnung

### 3.1 Wärmeleitungsgleichung und Sprungantwort g

#### 3.1.1 Wärmeleitungsgleichung

Für die nachfolgenden Betrachtungen wird vorausgesetzt, dass der dominante Wärmetransportmechanismus im Erdreich die Wärmeleitung ist, der konvektive Wärmetransport durch Wasserbewegungen im Erdreich also vernachlässigt werden kann. Das Problem der Wärmeleitung im Erdreich um eine Erdwärmesonde ist axialsymmetrisch. In Axialkoordinaten kann die Wärmeleitungsgleichung um eine Erdwärmesonde in radialer Richtung geschrieben werden als

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{\partial T_{\text{Earth}}}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_{\text{Earth}}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T_{\text{Earth}}}{\partial r} \quad \text{Gl. 3.1}$$

wobei die Temperaturleitfähigkeit  $a$  definiert ist durch

$$\text{Def: } a = \frac{\lambda}{c p_{\text{Earth}} \cdot \rho_{\text{Earth}}} \quad \text{Gl. 3.2}$$

Die Wärmeleitungsgleichung ist linear, so dass sowohl Einzelsonden, als auch Sondenfelder bei geometrischer Ähnlichkeit ähnliche Temperatur-Sprungantworten aufweisen. Diese Ähnlichkeit bezieht sich auf alle Temperaturen im Erdreich für alle Radien  $r$  um die Erdwärmesonden und für alle Zeiten  $t$ .

Bei einem Wärmeentzug aus einer Erdwärmesonde entsteht so im Erdreich eine Temperaturabsenkung  $\Delta T_{\text{Earth}}$  gegenüber der unbeeinflussten Erdreichtemperatur (=Temperaturtrichter), die sich mit fortlaufendem Entzug radial ausweitet. Diese Temperaturabsenkung  $\Delta T_{\text{Earth}}$  kann mit der spezifischen Entzugsleistung  $\dot{q}$  und der Wärmeleitfähigkeit  $\lambda_{\text{Earth}}$  dimensionsbefreit werden:

$$\text{Def: } g(r, t) = \frac{\Delta T_{\text{Earth}}(r, t) 2\pi \lambda_{\text{Earth}}}{\dot{q}} \quad \text{Gl. 3.3}$$

#### 3.1.2 Der radiale Temperatur-Trichter

Im stationären Fall ist der radiale Wärmefluss  $\dot{q}$  im Sonden-Nahbereich konstant und es gilt

$$\frac{\dot{q}}{2 \cdot \pi \cdot r} = \frac{\partial T_{\text{Earth}}}{\partial r} \cdot \lambda_{\text{Earth}} = \frac{\partial g}{\partial r} \cdot \frac{\dot{q}}{2 \cdot \pi} \quad \text{Gl. 3.4}$$

Durch Integration von  $r$  bis  $r_1$  wird daraus

$$g(r) = g(r_1) - \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) \quad \text{Gl. 3.5}$$

Diese Beziehung erlaubt es, mit einer einzigen Sprungantwort  $g$  das Temperaturverhalten im ganzen Sonden-Nahbereich abzuschätzen und bei bekannter Sprungantwort  $g$  an der Stelle  $r_1$  auf die Sprungantwort  $g$  an der Stelle  $r$  zu schliessen. Zu beachten ist dabei allerdings, dass für kleine Zeitschritte  $t$  die Annahme eines stationären Falles zu grösseren Abweichungen führt.

### 3.1.3 Dimensionslose Temperatursprungantwort g

Carslaw & Jaeger haben 1959 die Wärmeleitungsgleichung für eine unendliche Linienquelle analytisch gelöst und haben für g die folgenden Beziehung gefunden:

$$g = \frac{1}{2} \cdot \left[ -\gamma - \ln\left(\frac{r^2}{4 \cdot t \cdot a}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{r^2}{4 \cdot a \cdot t}\right)^n}{n \cdot n!} \right] \cong \frac{1}{2} \cdot \left[ \ln\left(\frac{4 \cdot t \cdot a}{r^2}\right) - \gamma \right] \quad \text{Gl. 3.6}$$

wobei  $\gamma=0.5772..$  die Eulerkonstant ist. Die Gültigkeit dieser Beziehung (Fehler kleiner 10%) ist beschränkt auf

$$t > \frac{5 \cdot r^2}{a} \quad \text{Gl. 3.7}$$

Werner, A.; Bigler, R.; Niederhauser, A. et. al. (1996) sind durch eine Analogie, abgeleitet aus der Brunnengleichung, auf die identische Lösung gekommen. Im Programm-Modul EWS ist Gl. 3.6 eingebaut und diese kann wahlweise, als Alternative zur g-Funktion von Eskilson, als äussere Randbedingung für das Simulationsgebiet ausgewählt werden.

Da bei einer unendlichen Linienquelle aus Gründen der Symmetrie das Nachströmen von Wärme weder von oben, noch von unten möglich ist, führt der Ansatz von Carslaw und Jaeger zu einer stetigen Vergrösserung des Temperaturtrichters, ein Gleichgewichtszustand ist mit diesem Ansatz nicht möglich. Da aber untiefe Erdwärmesonden primär die im Sommer von der Erdoberfläche ins Erdreich gespeicherte Wärme nutzen, wurde an der Universität Lund ein Ansatz für Erdwärmesonden mit der endlichen Sondenlänge H entwickelt.

Nach Claesson und Eskilson (1987) besitzen Erdwärmesonden eine Zeitkonstante  $t_s$ , mit der das zeitliche Verhalten des Erdreichs um die Erdwärmesonden dimensionsbefreit werden kann:

$$t_s = \frac{H^2}{9a} \quad \text{Gl. 3.8}$$

Die dimensionslose Zahl Es von Eskilson

$$Es = \frac{t}{t_s} = \frac{9a}{H^2} t \quad \text{Gl. 3.9}$$

kann somit als dimensionslose Zeit für Sondenfelder und Einzelsonden betrachtet werden.

Die Kenntnis der Zeitkonstanten ist vor allem bei nicht ausgeglichener jährlicher Entzugsbilanz wesentlich. Bis zum Zeitpunkt  $Es = 0.1$  muss mit einer merklichen Abkühlung bzw. Erwärmung des Erdreiches gerechnet werden. Danach erfolgt nur noch eine sehr geringe Temperaturänderung im Erdreich. Der Gleichgewichtszustand zwischen Wärmeentzug und nachhaltigem Nachfliessen der Wärme ist dann ab ca.  $Es = 10$  erreicht.

Die dimensionslose Temperatursprungantwort g ("g-function") ist nach Eskilson (1987) sowohl für Einzelsonden als auch für Sondenfelder einzig eine Funktion der dimensionslosen Zeit  $Es$  und des dimensionslosen Sondenabstandes  $r_p/H$ . Man geht dabei von einem konstanten, spezifischen Wärmeentzug pro Sondenlänge  $\dot{q}$  aus.

Für eine Einzelsonde im Bereich  $5 r_1^2/a < t < t_s$  kann die Funktion  $g$  bei einem maximalen Fehler von 7 % angenähert werden mit

$$g(t, r_1) = \ln\left(\frac{H}{2r_1}\right) + 0.5 \ln(Es) \quad \text{Gl. 3.10}$$

Für Zeiten grösser als  $t_s$  strebt die Einzelsonde dem folgenden Gleichgewichtszustand zu:

$$g(r_1) = \ln\left(\frac{H}{2 \cdot r_1}\right) \quad \text{Gl. 3.11}$$

In Abb. 3.1 sind als Beispiel die dimensionslosen Temperatur-Sprungantworten  $g$  von zwei Erdwärmesonden im Abstand  $B$  eingezeichnet. Im Vergleich dazu ist gestrichelt die  $g$ -function einer Einzelsonde dargestellt. Weitere Temperatur-Sprungantworten für verschiedene Erdwärmesondenfelder sind in Anhang Gl. 3.10 zu finden.

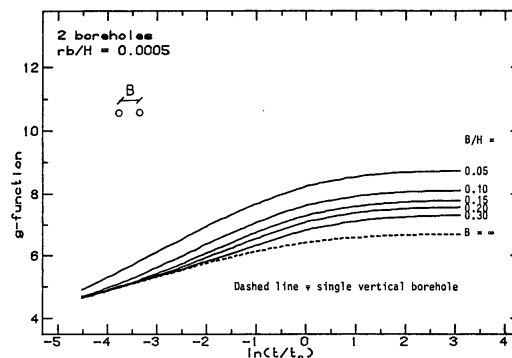


Abb. 3.1 Dimensionslose Sprungantwort  $g$  für zwei Erdwärmesonden mit dem Abstand  $B$  nach Eskilson (1987).

Die Theorie von (Claesson und Eskilson, 1987) geht davon aus, dass es bei un tiefen Erdwärmesonden nach ca.  $10 t_s$  der Gleichgewichtszustand erreicht ist, bei dem mehr als 95% der Wärme, die dem Erdreich durch eine Erdwärmesonde entzogen wird, im Jahresmittel von der Erdoberfläche zusätzlich wieder ins Erdreich nachströmt (cf. Abb. 3.2). Dies ist eine Grundvoraussetzung dafür, dass Gl. 3.10 und Gl. 3.11 gültig sind.

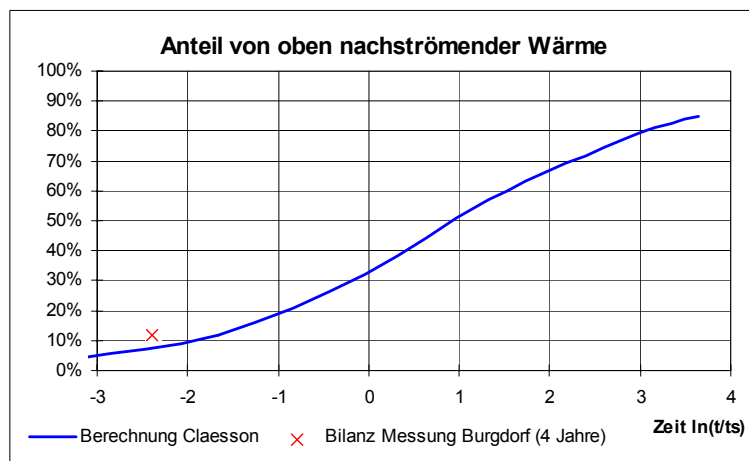


Abb. 3.2 Anteil am Wärmeentzug, der von der Bodenoberfläche in die Erde zusätzlich nachströmt für eine Erdwärmesonde mit  $H=110\text{m}$  und Temperaturleitfähigkeit  $a=1.62 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  (Huber, Pahud, 1999a).



### 3.1.4 Grundsätzliche Unterschiede zwischen tiefen und untiefen Erdwärmesonden

Wenn allerdings die Fluidtemperatur beim Entzug höher liegt als die mittlere Erdoberflächen-temperatur, so ist es nicht mehr möglich, dass im Jahresmittel ein zusätzlicher Wärmestrom von der Erdoberfläche ins Erdreich induziert wird. Gl. 3.10 und Gl. 3.11 sind für diesen Fall somit nicht mehr gültig.

Für tiefe Erdwärmesonden ist deshalb ein Ansatz mit einer unendlich tiefen Linienquelle besser geeignet. Bei diesen ist allerdings bereits vom Ansatz her das Nachströmen in vertikaler Richtung ausgeschlossen und es ist damit nicht möglich, die Frage der Herkunft der Wärme und die Erreichbarkeit eines Gleichgewichtszustandes zu klären.

Wie der nachfolgende Vergleich allerdings zeigt, ist selbst bei tiefen Erdwärmesonden eine Berechnung mit dem Ansatz von Claesson und Eskilson möglich, da die Zeitkonstante für tiefe Erdwärmesonden so gross wird, dass im betrachteten Zeitrahmen keine nennenswerte Abweichung der Modelle mehr festgestellt werden kann (cf. Abb. 3.3)

### 3.1.5 Vergleich der Modelle

In Abb. 3.3 werden die Ansätze von Carslaw & Jaeger für eine unendlich tiefe Erdwärmesonde mit dem Ansatz von Eskilson für je eine 10m, 100m und 500m tiefe Erdwärmesonde verglichen. Bis zum Erreichen der Zeitkonstante  $t_s$  ist zwischen den Modellen keine nennenswerte Abweichung festzustellen.

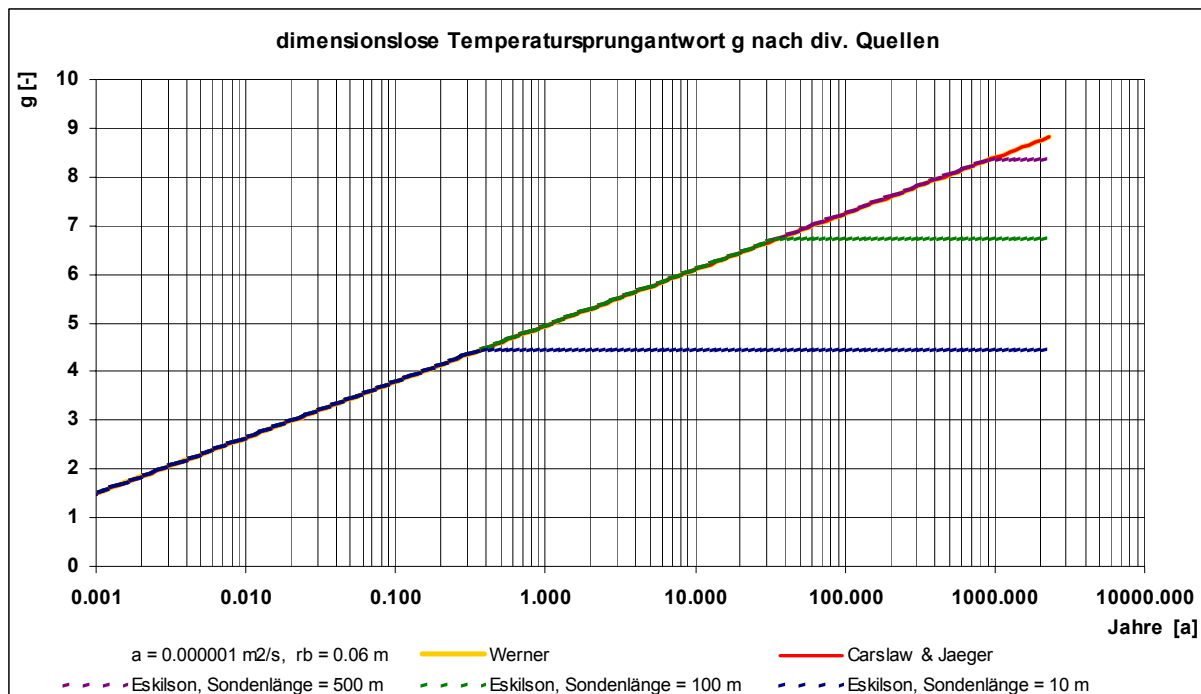


Abb. 3.3 Dimensionslose Sprungantwort  $g$  nach der Theorie von Carslaw & Jaeger (1959), Werner et al. (1996) und Eskilson (1987).

### 3.2 Die Bohrlochtemperatur $T_b$ und die Fluidtemperatur $T_f$

Um die Temperatur im Erdreich zu erhalten, kann nun die Temperatur-Sprungantwort  $\Delta T$  von der ungestörten Anfangstemperatur  $T_m$  abgezählt werden (Superpositionsprinzip). Die Temperatur am Bohrlochrand  $T_{\text{Earth}}(r_1)$  (=Bohrlochtemperatur  $T_b$ ) kann aus  $g$  und  $T_m$  berechnet werden mit

$$T_b(z) = T_m(z) - \frac{\dot{q}}{R_g} = T_m(z) - \frac{\dot{q}}{2 \pi \lambda_{\text{Earth}}} g(t, r_1) \quad \text{Gl. 3.12}$$

$T_m$  ist die mittlere Erdreichtemperatur im ungestörten Zustand in der Tiefe  $z$ . Sie berechnet sich aus der durchschnittlichen Jahres-Erdoberflächentemperatur  $T_{\text{mo}}$  und dem Temperaturgradienten  $\Delta T_{\text{Grad}}$  mit Hilfe der Gleichung Gl. 2.2

Die durchschnittliche Jahres-Erdoberflächentemperatur  $T_{\text{mo}}$  ist gleich der durchschnittlichen Jahres-Lufttemperatur plus einer mittleren Bodenerwärmung die typischerweise zwischen 0.8 bis 2 °C liegt (cf. Kapitel 2.2), der Temperaturgradient  $\Delta T_{\text{Grad}}$  schwankt in der Schweiz typischerweise zwischen von 0.025 bis 0.045 K/m.

Die über die Bohrtiefe gemittelte Bohrlochtemperatur  $\overline{T_b}$  ist definiert als

$$\text{Def } \overline{T_b} = \frac{1}{H} \cdot \int_0^H T_b(z) \cdot dz \quad \text{Gl. 3.13}$$

Für den Fall eines konstanten Wärmeentzugs pro Bohrlänge  $\dot{q}$  kann die über die Tiefe im Bohrloch gemittelte Bohrlochtemperatur  $\overline{T_b}$  berechnet werden mit

$$\overline{T_b} = \overline{T_m} - \frac{\dot{q}}{R_g} = \overline{T_m} - \frac{\dot{q}}{2 \pi \lambda_{\text{Earth}}} g(t, r_1) \quad \text{Gl. 3.14}$$

wobei

$$\overline{T_m} = T_{\text{mo}} - \Delta T_{\text{Grad}} \cdot \frac{H}{2} \quad \text{Gl. 3.15}$$

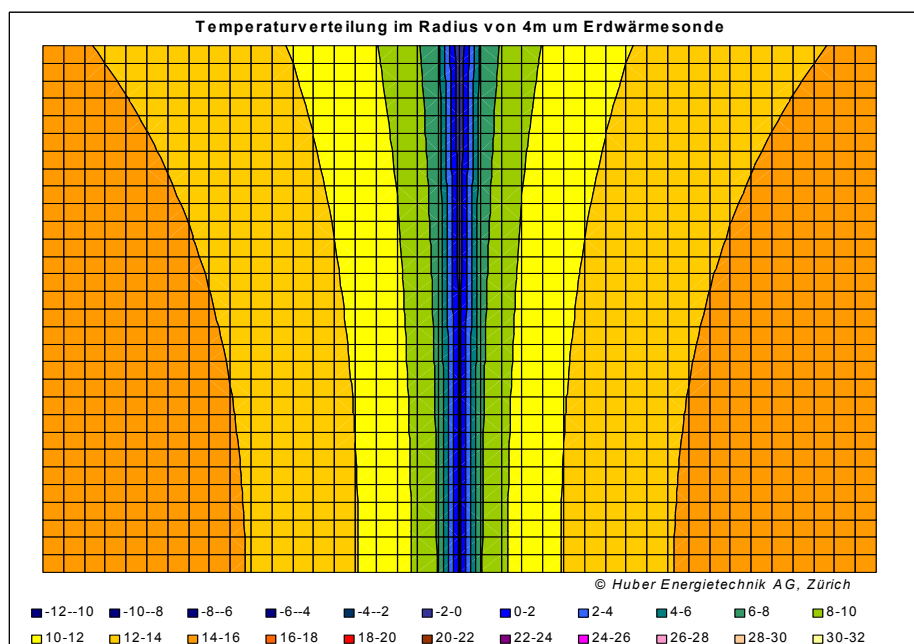


Abb. 3.4 Erdreichtemperatur um eine 300m tiefe Erdwärmesonde mit  $\lambda_{\text{Earth}} = 2.4 \text{ W/mK}$  nach 30 Tagen Dauerentzug mit 40 W/m, berechnet mit Gl. 3.10, Gl. 3.12 und Gl. 3.15.

### 3.2.1 Die Fluidtemperatur $T_f$

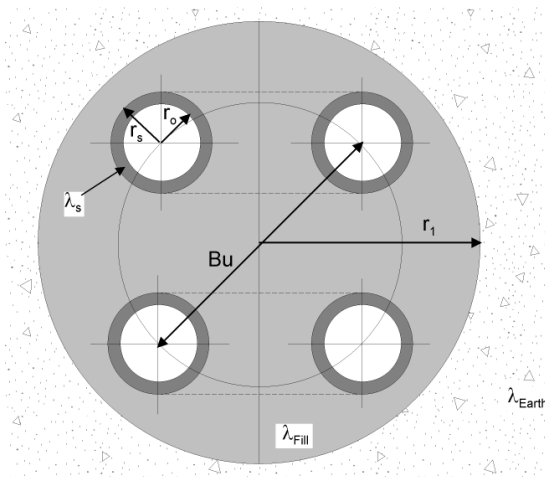
Die mittlere Fluidtemperatur  $T_f$  ist definiert als der arithmetische Mittelwert des nach unten und des nach oben strömenden Sondenfluids

$$\text{Def: } T_f(z) = \frac{T_{\text{up}}(z) + T_{\text{down}}(z)}{2} \quad \text{Gl. 3.16}$$

Die Fluidtemperatur  $T_f$  ist also eine Funktion der Tiefe  $z$  im Bohrloch. Die mittlere Fluidtemperatur  $\overline{T_f}$  ist definiert als

$$\text{Def: } \overline{T_f} = \frac{1}{2} \cdot (T_{\text{Quelle}} + T_{\text{Rücklauf}}) \quad \text{Gl. 3.17}$$

### 3.3 Thermische Widerstände $R_a$ und $R_b$ in der Doppel-U-Sonde



Eine idealisierte Doppel-U-Sonde mit dem Bohrradius  $r_1$  und mit den 4 Sondenrohren (mit Innenradius  $r_o$  und Aussenradius  $r_s$ ) ist auf nebenstehendem Bild zu sehen. In je 2 Sondenrohren fliesst das Sondenfluid nach unten und nach oben. Die Hinterfüllung besitzt die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda_{\text{Fill}}$ , die Sondenrohre  $\lambda_s$  und das umgebende Erdreich  $\lambda_{\text{Earth}}$ . Die genaue Lage der 4 Sondenrohre in der Bohrung kann definiert werden mit der Exzentrizität  $b$

$$b = \frac{Bu}{2 \cdot r_1} \quad \text{Gl. 3.18}$$

Abb. 3.5 Bezeichnungen an der Doppel-U-Sonde

Die Exzentrizität  $b$  ist mit dem Rohrabstand  $Bu$  („shank spacing“) gemäss Abb. 3.5 definiert. Die geometrisch maximal mögliche Exzentrizität  $b_{\text{Max}}$  beträgt:

$$b_{\text{Max}} = \frac{2 \cdot r_1 - 2 \cdot r_s}{2 \cdot r_1} = 1 - \frac{r_s}{r_1} \quad \text{Gl. 3.19}$$

Die geometrisch minimale Exzentrizität  $b_{\text{Min}}$  (bei einem nicht zentrierten Füllrohr) beträgt:

$$b_{\text{Min}} = \frac{r_s}{r_1} \quad \text{Gl. 3.20}$$

Als reine Stoffgrösse wird der Konduktivitätsparameter  $\sigma$  definiert mit

$$\sigma = \frac{\lambda_{\text{Fill}} - \lambda_{\text{Earth}}}{\lambda_{\text{Fill}} + \lambda_{\text{Earth}}} \quad \text{Gl. 3.21}$$

Der interne thermische Bohrlochwiderstand  $R_a$  [Km/W] ist eine charakteristische Grösse für die längenbezogenen, thermischen „Verluste“  $\Delta q_i$  [W/m] des heraufströmenden Fluids an das nach unten strömende Fluid und ist unabhängig von der Tiefe im Bohrloch:

$$\text{Def: } R_a = \frac{T_{\text{up}}(z) - T_{\text{down}}(z)}{\Delta q_i(z)} \quad \text{Gl. 3.22}$$

Mit der mittleren Fluidtemperatur  $T_f$  in der Sonde und der Bohrlochtemperatur  $T_b$  kann der thermische Bohrlochwiderstand  $R_b$  definiert werden als

$$\text{Def: } R_b = \frac{T_b(z) - T_f(z)}{\dot{q}} \quad \text{Gl. 3.23}$$

Der Bohrlochwiderstand  $R_b$  ist unabhängig von der Tiefe im Bohrloch und setzt sich zusammen aus dem Bohrloch-Hinterfüllungswiderstand  $R_c$  und dem Wärmeübergangswiderstand  $R_\alpha$  von der Hinterfüllung ans Sondenfluid:

$$R_b = R_\alpha + R_c \quad \text{Gl. 3.24}$$

Bei Doppel-U-Sonden kann der Wärmeübergangswiderstand  $R_\alpha$  berechnet werden mit

$$R_\alpha = \frac{1}{8 \cdot \pi \cdot \alpha \cdot r_o} \quad \text{Gl. 3.25}$$

Der effektive Bohrlochwiderstand  $R_b^*$  ist mit der über die Bohrtiefe gemittelten Bohrlochtemperatur  $\overline{T_b}$  und der mittleren Fluidtemperatur  $\overline{T_f}$  definiert als

$$\text{Def: } R_b^* = \frac{\overline{T_b} - \overline{T_f}}{\dot{q}} \quad \text{Gl. 3.26}$$

Für den Fall eines konstanten Wärmeentzugs pro Bohrlänge  $\dot{q}$  kann  $T_b$  mit den thermischen Widerständen  $R_a$  und  $R_b$  für Doppel-U-Sonden nach Gl. 10.21 berechnet werden mit

$$T_b = \dot{q} \cdot R_b + \overline{T_f} + \frac{\dot{q} \cdot z}{R_a \cdot \dot{m}^2 \cdot c_{p_{\text{Sole}}}} \left( H - \frac{z}{2} \right) \quad \text{Gl. 3.27}$$

und damit wird

$$\overline{T_b} = \frac{1}{H} \cdot \int_0^H T_b \cdot \partial z = \dot{q} \cdot R_b + \overline{T_f} + \frac{\dot{q} \cdot H^2}{3 \cdot R_a \cdot \dot{m}^2 \cdot c_{p_{\text{Sole}}}} \quad \text{Gl. 3.28}$$

und daraus wird  $R_b^*$  zu (cf. Gl. 10.23)

$$R_b^* = R_b + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{R_a} \cdot \frac{H^2}{\dot{m}^2 \cdot c_{p_{\text{Sole}}}} \quad \text{Gl. 3.29}$$

### 3.3.1 Internen Bohrlochwiderstandes $R_a$ nach Hellström (1991)

Nach Hellström (1991, S. 147, Formel 9.149) kann der interne Bohrlochwiderstand  $R_a$  für Doppel-U-Sonden mit symmetrischer Sondenrohr-Anordnung berechnet werden mit

$$R_a = \frac{1}{\pi \cdot \lambda_{\text{Fill}}} \left[ \ln \left( \frac{\sqrt{2} \cdot b \cdot r_i}{r_o} \right) - \frac{1}{2} \cdot \ln \left( \frac{2 \cdot b \cdot r_i}{r_o} \right) - \frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot \ln \left( \frac{1-b^4}{1+b^4} \right) \right] + \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot r_o \cdot \alpha} + R_s \quad \text{Gl. 3.30}$$

wobei  $R_s$  der thermischer Widerstand der Sondenrohr-Wand ist, der berechnet wird mit

$$R_s = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda_s} \cdot \ln \left( \frac{r_s}{r_o} \right) \quad \text{Gl. 3.31}$$

### 3.3.2 Bohrlochwiderstandes $R_b$ nach Hellström (1991)

Für eine Doppel-U-Sonde kann nach Hellström (1991, S. 89, Formel 8.69) der Bohrloch-widerstand  $R_b$  berechnet werden mit

$$R_b = \frac{1}{8 \cdot \pi \cdot \lambda_{\text{Fill}}} \cdot \left[ \beta + \ln \left( \frac{r_i}{r_o} \right) + \ln \left( \frac{r_i}{Bu} \right) + \sigma \cdot \ln \left( \frac{r_i^4}{r_i^4 - \frac{Bu^4}{16}} \right) - \frac{\frac{r_o^2}{Bu^2} \left[ 1 - \sigma \cdot \frac{\frac{1}{4} Bu^4}{\left( r_i^4 - \frac{Bu^4}{16} \right)} \right]^2}{\left\{ \frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{r_o^2}{Bu^2} \left[ 1 + \sigma \cdot \frac{Bu^4 \cdot r_i^4}{\left( r_i^4 - \frac{Bu^4}{16} \right)^2} \right] \right\}} \right] \quad \text{Gl. 3.32}$$

mit

$$\beta = 2 \cdot \pi \cdot \lambda_{\text{Fill}} \cdot [R_\alpha + R_w] = \lambda_{\text{Fill}} \cdot \left[ \frac{1}{r_o \cdot \alpha} + \frac{1}{\lambda_s} \cdot \ln \left( \frac{r_s}{r_o} \right) \right] \quad \text{Gl. 3.33}$$

### 3.3.3 Erreichbare Werte für die thermischen Widerstände $R_a$ und $R_b$

Nachfolgend wurde untersucht, welche thermischen Widerstände bei Doppel-U-Sonden erreichbar sind. Berechnet wurden die Werte mit Gl. 3.30 und Gl. 3.32.

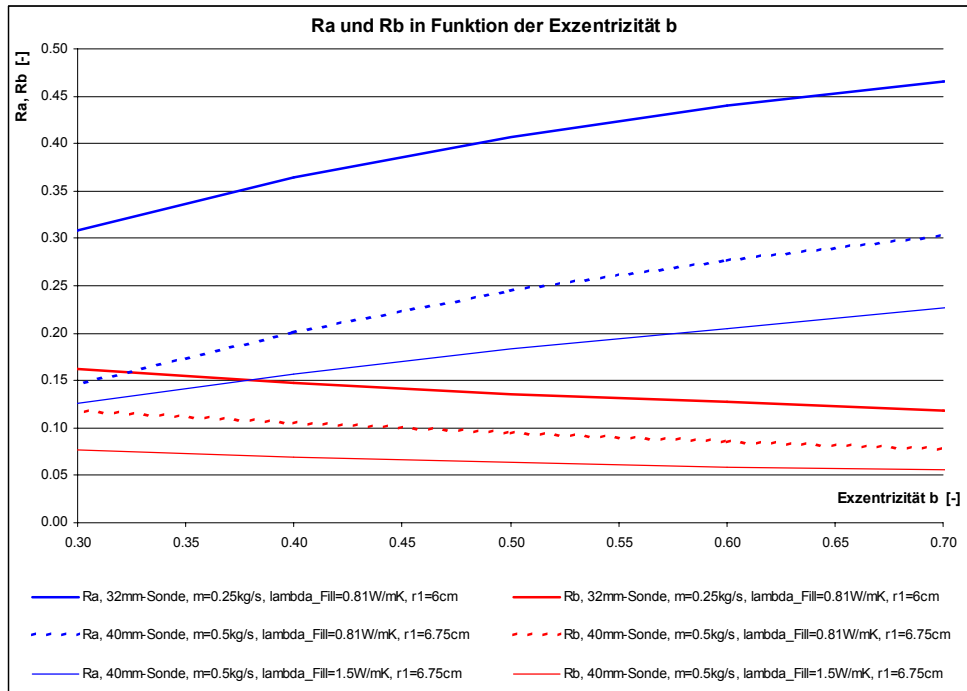


Abb. 3.6  $R_a$  und  $R_b$  in Funktion der Exzentrizität  $b$  bei Doppel-U-Sonden

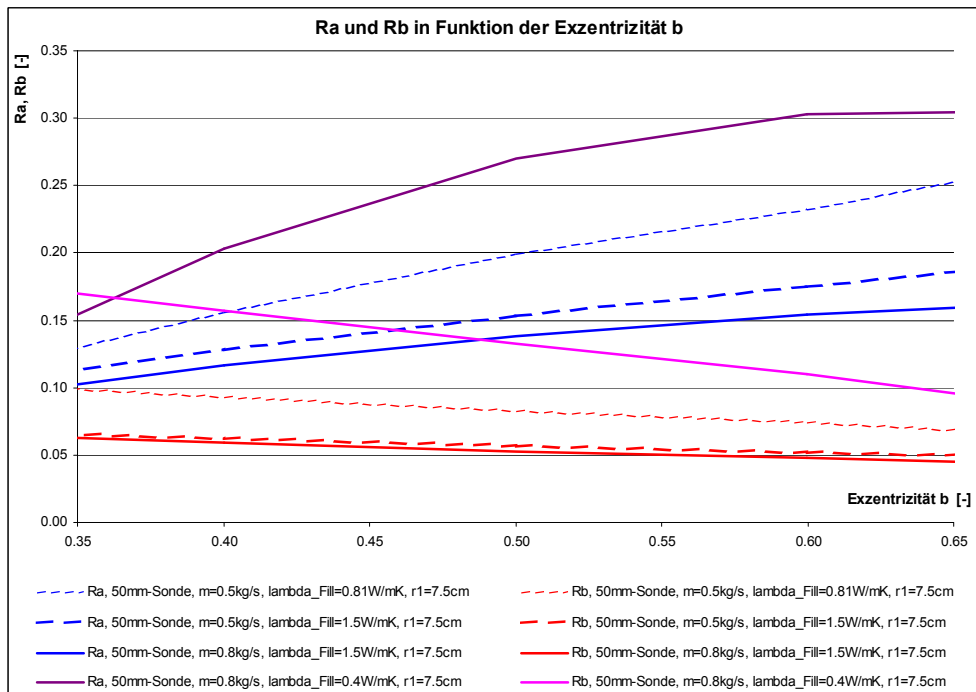


Abb. 3.7  $R_a$  und  $R_b$  in Funktion der Exzentrizität  $b$  bei Doppel-U-Sonden

### 3.4 Erdwärmesondengleichung für Doppel-U-Sonden

Mit Gl. 3.12 kann die zeitliche Entwicklung der durchschnittlichen Bohrlochtemperatur berechnet werden, sofern die Temperatur-Sprungantwort  $g$  bekannt ist. In diesem Abschnitt wird nun gezeigt, wie sich damit die Quelltemperatur  $T_{\text{Quelle}}$ , d. h. die durchschnittliche Temperatur der Sole, die aus der Sonde kommt, bestimmen lässt. Aus der Definition **Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.** kann die Quelltemperatur  $T_{\text{Quelle}}$  berechnet werden mit

$$T_{\text{Quelle}} = 2 \cdot \overline{T_f} - T_{\text{Rücklauf}} \quad \text{Gl. 3.34}$$

Mit der Energiebilanz für die Rücklaufftemperatur

$$T_{\text{Rücklauf}} = T_{\text{Quelle}} - \frac{\dot{q} H}{c_{p_{\text{Sole}}} \cdot \dot{m}} \quad \text{Gl. 3.35}$$

und den Gleichungen Gl. 3.14, Gl. 3.26 und Gl. 3.34 kann die Quelltemperatur berechnet werden nach

$$T_{\text{Quelle}} = \overline{T_b} - \left[ R_b^* - \frac{H}{2 \cdot \dot{m} \cdot c_{p_{\text{Sole}}}} \right] \dot{q} = \overline{T_b} - \left[ R_b + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{R_a} \cdot \frac{H^2}{\dot{m}^2 \cdot c_{p_{\text{Sole}}}^2} - \frac{H}{2 \cdot \dot{m} \cdot c_{p_{\text{Sole}}}} \right] \dot{q} \quad \text{Gl. 3.36}$$

Dabei ist  $H$  die Sondenlänge,  $\dot{q}$  der Wärmeentzug aus der Sonde pro Bohrlänge und  $\dot{m}_{\text{Sole}}$  der Massenstrom der Sole pro Sonde.

Damit erhält man die **Erdwärmesondengleichung für Doppel-U-Sonden**:

$$T_{\text{Quelle}} = T_{\text{mo}} + \Delta T_{\text{Grad}} \cdot \frac{H}{2} - \left[ \frac{g(t, r_l)}{2\pi \lambda_{\text{Earth}}} + R_b + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{R_a} \cdot \frac{H^2}{\dot{m}^2 \cdot c_{p_{\text{Sole}}}^2} - \frac{H}{2 \cdot \dot{m} \cdot c_{p_{\text{Sole}}}} \right] \dot{q} \quad \text{Gl. 3.37}$$

Der thermische Bohrloch-Widerstand  $R_b$  (Hellström, 1991) kann aufgeteilt werden in den Wärmeübergangswiderstand zwischen der Sole und der Sonde  $R_\alpha$  und den thermischen Widerstand  $R_c$  bis zum Bohrlochradius, womit für Doppel-U-Sonden aus Gl. 3.37 und Gl. 3.25 die folgende Beziehung wird:

$$T_{\text{Quelle}} = T_{\text{mo}} + \Delta T_{\text{Grad}} \cdot \frac{H}{2} - \left[ \frac{g(t, r_l)}{2\pi \lambda_{\text{Earth}}} + \frac{1}{8\pi \alpha r_o} + R_c + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{R_a} \cdot \frac{H^2}{\dot{m}^2 \cdot c_{p_{\text{Sole}}}^2} - \frac{H}{2 \cdot \dot{m} \cdot c_{p_{\text{Sole}}}} \right] \dot{q} \quad \text{Gl. 3.38}$$

$\alpha$  ist der Wärmeübergangskoeffizient des Sondenfluids an die Sonde und  $r_o$  der Innenradius der Sondenrohre (z. B. 26 mm für eine 32 mm-Doppel-U-Sonde). Ansätze für  $\alpha$  sind z. B. in (Huber und Schuler, 1997) zu finden.

Für die Sonden-Rücklaufftemperatur  $T_{\text{Rücklauf}}$  (massgebend für die Frostsicherheit) gilt damit:

$$T_{\text{Rücklauf}} = T_{\text{mo}} + \Delta T_{\text{Grad}} \cdot \frac{H}{2} - \left[ \frac{g(t, r_l)}{2\pi \lambda_{\text{Earth}}} + R_b + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{R_a} \cdot \frac{H^2}{\dot{m}^2 \cdot c_{p_{\text{Sole}}}^2} + \frac{H}{2 \cdot \dot{m} \cdot c_{p_{\text{Sole}}}} \right] \dot{q} \quad \text{Gl. 3.39}$$

Grundvoraussetzung für die Gültigkeit der Erdwärmesondengleichung ist der konstante Wärmeentzug  $\dot{q}$  über die ganze Bohrtiefe. Für Tiefe Erdwärmesonden und kleine SONDENDURCHSÄTZE  $\dot{m}$  ist diese Grundvoraussetzung oft nicht mehr gegeben. Für diesen Fall ist eine Simulationslösung wie im Programm-Modul EWS erforderlich.

### 3.5 Temperaturen im Sondenfluid bei Doppel-U-Sonden

Die Temperatur des hinunterfließenden Sondenfluids  $T_{\text{down}}(z)$  erhält man durch das Einsetzen von Gl. 3.39 in Gl. 10.18

$$T_{\text{down}}(z) = T_{\text{mo}} + \Delta T_{\text{Grad}} \cdot \frac{H}{2} - \left[ \frac{g(t, H)}{2\pi \lambda_{\text{Earth}}} + R_b + \frac{1}{R_a} \cdot \frac{\frac{H^2}{3} - z \cdot H + \frac{z^2}{2}}{\dot{m}^2 \cdot c_{p, \text{Sole}}^2} + \frac{H - z}{2 \cdot \dot{m} \cdot c_{p, \text{Sole}}} \right] \dot{q} \quad \text{Gl. 3.40}$$

Analog erhält man die Temperatur des hinaufströmenden Sondenfluids  $T_{\text{up}}(z)$  durch das Einsetzen von Gl. 3.39 in Gl. 10.19

$$T_{\text{up}}(z) = T_{\text{mo}} + \Delta T_{\text{Grad}} \cdot \frac{H}{2} - \left[ \frac{g(t, H)}{2\pi \lambda_{\text{Earth}}} + R_b + \frac{1}{R_a} \cdot \frac{\frac{H^2}{3} - z \cdot H + \frac{z^2}{2}}{\dot{m}^2 \cdot c_{p, \text{Sole}}^2} - \frac{H - z}{2 \cdot \dot{m} \cdot c_{p, \text{Sole}}} \right] \dot{q} \quad \text{Gl. 3.41}$$

Mit diesen Beziehungen kann nun die Fluidtemperatur über die ganze Bohrtiefe berechnet und dargestellt werden. Als Einschränkung muss beachtet werden, dass Gl. 3.40 und Gl. 3.41 streng genommen nur für einen konstanten Wärmeentzug gilt (cf. Kapitel 10.5.1). Der daraus resultierende Fehler für tiefe Erdwärmesonden kann mit Abb. 10.12 abgeschätzt werden und beträgt für das Beispiel in Abb. 5.1 ca. 10% für  $R_b^*$  (cf. Gl. 3.26).

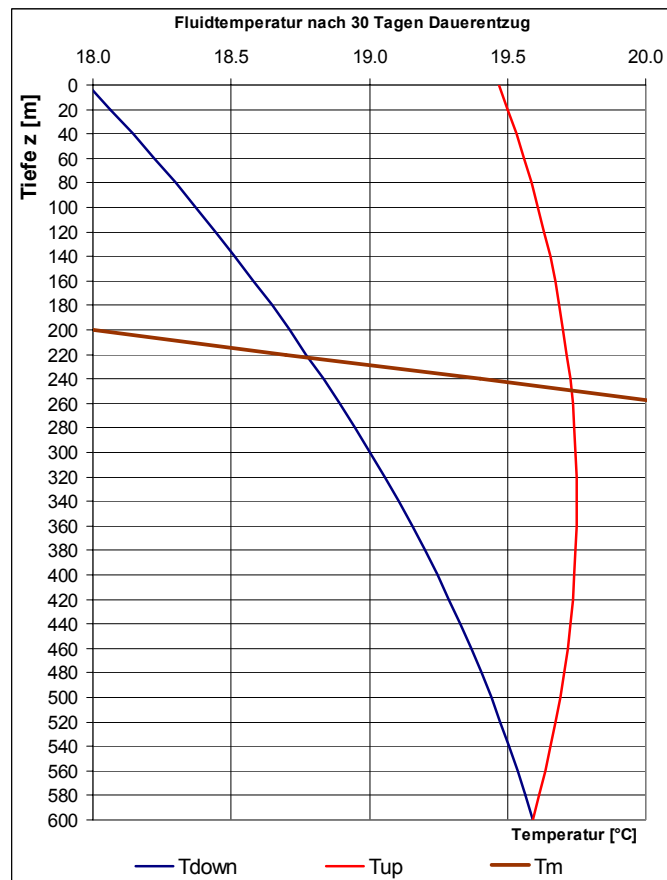
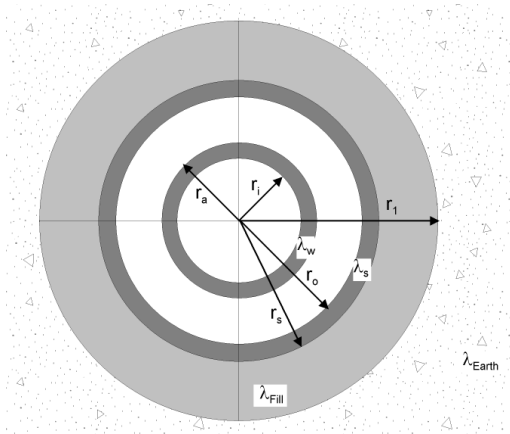


Abb. 3.8 Fluidtemperaturen in einer 600m tiefen, homogenen Doppel-U-Sonde 50 mm mit einem Sonden-durchsatz von 0.8 kg/s Wasser bei einer Entzugsleistung von 5 kW nach 30 Tagen Dauerbetrieb (Sprungantwort). Wärmeleitfähigkeit der Erde  $\lambda_{\text{Earth}} = 2.6 \text{ W/mK}$  und der Hinterfüllung  $\lambda_{\text{Fill}} = 1.5 \text{ W/mK}$ , Jahresdurchschnittstemperatur der Oberfläche  $11^\circ\text{C}$ , Temperaturgradient  $3.5^\circ\text{C}/100\text{m}$ , Bohrdurch-messer 17.2cm.  $R_a = 0.154 \text{ Km/W}$ ,  $R_b = 0.057 \text{ Km/W}$ . Exzentrizität = 0.5.



### 3.6 Thermische Widerstände $R_a$ / $R_b$ an der Koaxialsonde



#### Bezeichnungen an der Koaxialsonde

Eine idealisierte Koaxialsonde ist in Abb. 3.9 dargestellt. Grau dargestellt ist die Bohrung mit dem Bohrradius  $r_1$ .

Die Hinterfüllung besitzt die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda_{\text{Fill}}$ , das innere Sondenrohr  $\lambda_w$ , das äussere Sondenrohr  $\lambda_s$  und das Erdreich  $\lambda_{\text{Earth}}$ .

$r_i$  und  $r_a$  sind die inneren und äusseren Radien des inneren Sondenrohres,  $r_o$  und  $r_s$  die inneren und äusseren Radien des äusseren Sondenrohres.

Abb. 3.9 Bezeichnungen an der Koaxialsonde

#### 3.6.1 Modellierung des internen Bohrlochwiderstandes $R_a$

Auch für Koaxialsonden gilt die Definition für den internen Bohrlochwiderstand  $R_a$  nach Gl. 3.22. Der thermische Widerstand  $R_a$  ist somit die Summe aus dem Wärmeübergangswiderstand vom hinaufströmende Fluid ans Innenrohr, dem thermischen Widerstand des Innenrohres und dem Wärmeübergangswiderstand vom Innenrohr ans hinabströmenden Fluid:

$$R_a = \left[ \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot r_i \cdot \alpha_i} + \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda_w} \cdot \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right) + \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot r_a \cdot \alpha_a} \right] \quad \text{Gl. 3.42}$$

#### 3.6.2 Modellierung des Bohrlochwiderstandes $R_b$

Bei der Koaxialsonde ist  $R_b$  definiert als der thermische Widerstand des äusseren Sondenfluids (in der Regel das hinabströmende Fluid) bis an die Wand des Bohrlochs (beim Radius  $r_1$ ):

$$R_b = \left[ \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot r_o \cdot \alpha_o} + \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda_s} \cdot \ln\left(\frac{r_s}{r_o}\right) + \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda_{\text{Fill}}} \cdot \ln\left(\frac{r_1}{r_s}\right) \right] \quad \text{Gl. 3.43}$$

Bei der Dimensionierung der inneren Sondenrohre wird oft empfohlen, die Fließgeschwindigkeit des hinaufströmenden Fluids höher zu wählen als die des hinunterströmenden Fluids. Das Verhältnis der Fließgeschwindigkeit vom hinaufströmenden zum hinunterströmenden Fluid kann mit dem Faktor  $k_f$  beschrieben werden:

$$\text{Def: } k_f = \frac{r_o^2 - r_a^2}{r_i^2} \quad \text{Gl. 3.44}$$

Mit der Wandstärke  $w$  des inneren Sondenrohres

$$\text{Def: } w = r_a - r_i \quad \text{Gl. 3.45}$$

kann der Innenrohrradius  $r_i$  auch dargestellt werden als

$$r_i = -\frac{1}{k_f + 1} \cdot w + \sqrt{\left(\frac{1}{k_f + 1} \cdot w\right)^2 - \frac{1}{k_f + 1} \cdot (w^2 - r_o^2)} \quad \text{Gl. 3.46}$$

### 3.6.3 Erreichbare Werte für die thermischen Widerstände $R_a$ und $R_b$

Wie Abb. 3.10 zeigt, stimmt die Empfehlung für ein grosses  $k_f$  nicht generell, da bei grösseren Fließgeschwindigkeiten auch der Wärmeübergangswiderstand  $\alpha$  vom Fluid an die Wand grösser wird. Solange beide Strömungen im turbulenten Bereich sind, ist der Einfluss von  $k_f$  auf  $R_a$  und  $R_b$  eher gering. Um einen minimalen Druckabfall zu erreichen, scheint hier ein  $k_f$  von 1 am besten zu sein.

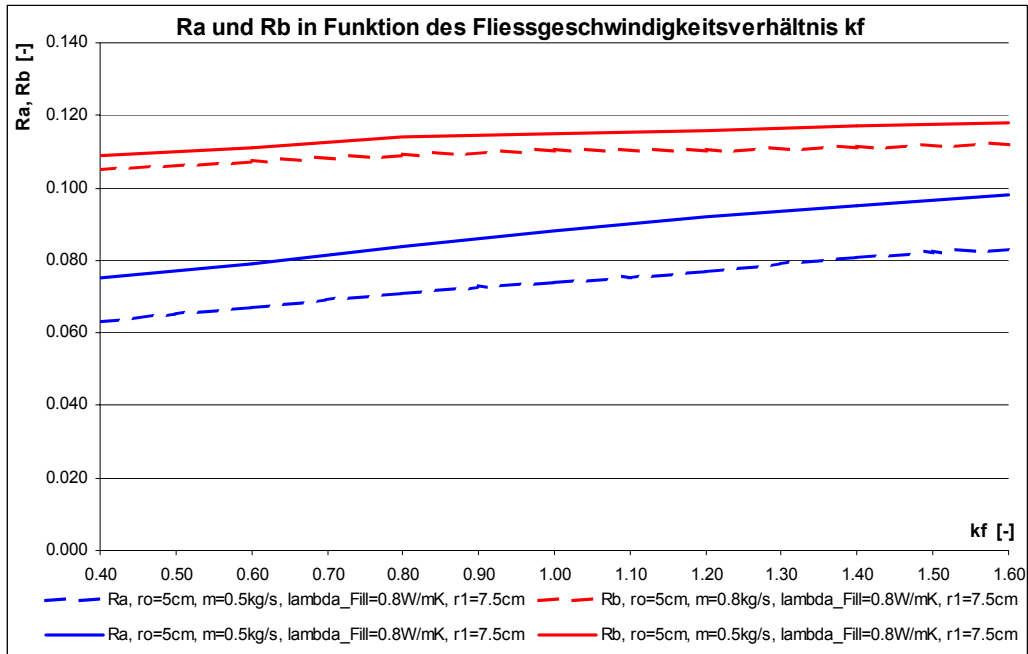


Abb. 3.10  $R_a$  und  $R_b$  in Funktion des Fließgeschwindigkeitsverhältnis  $k_f$  für Koaxialsonden

## 4 Erweiterungen im Programm-Modul EWS

Im folgenden Abschnitt sollen die Ergänzungen im Programm – Modul EWS (Huber, Schuler 1997) beschrieben werden. Neu wurden die Modelle für die Koaxialsonde ( Kapitel 4.5 und Anhang 10.2.5 ) eingefügt. Dem besseren Verständnis wegen wird das Rechenverfahren und die Berechnung der Doppel-U-Sonden nochmals kurz aufgeführt.

### 4.1 Rechengitter

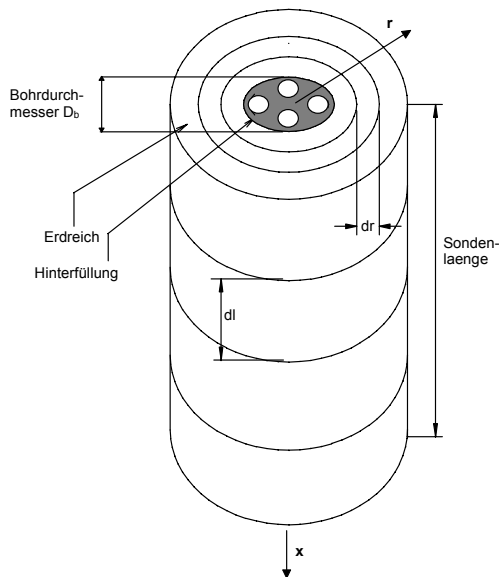


Abb. 4.1 Rechengitter der Sonde

Die Berechnungen werden in einem axial-symmetrischen Rechengitter gemäss Abb. 4.1 durchgeführt. In axialer Richtung wird die Erde in gleiche Teile der Länge dl aufgeteilt.

Das Rechengitter in radialer Richtung ist variabel. Es wird durch den Gitterfaktor f definiert:

$$\text{Gitterfaktor } f = \frac{r_{j+1} - r_j}{r_j - r_{j-1}} \quad \text{Gl. 4.1}$$

Bei Vorgabe des Simulationsgebietes mit dem grössten Rechenradius  $r_m$  kann das Gitter wie folgt berechnet werden, wobei m die Anzahl Rechenknoten in radialer Richtung darstellt:

$$r_0 = \frac{D_i}{2} \quad \text{Gl. 4.2}$$

$$r_1 = \frac{D_b}{2} = \frac{\text{Bohrdurchmesser}}{2} \quad \text{Gl. 4.3}$$

$$\text{für } j \geq 2: \quad r_j = r_{j-1} + (r_m - r_1) \frac{1-f}{1-f^{m-1}} f^{j-2} \quad \text{Gl. 4.4}$$

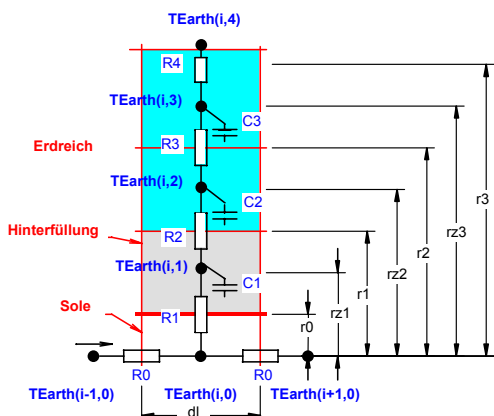


Abb. 4.2 Rechengitter der Sonde

Ein Gitterfaktor von 2 verdoppelt jeweils die Radius-Differenz zwischen zwei Rechenvolumen.

Der für die Bestimmung der thermischen Widerstände wichtige „Massenschwerpunkt“ kann wie folgt berechnet werden:

$$\text{Def: } rz_j = \sqrt{\frac{(r_j^2 + r_{j-1}^2)}{2}} \quad \text{Gl. 4.5}$$

## 4.2 Thermische Widerstände R und Leitfähigkeiten L

Der thermische Widerstand R ist der Kehrwert der thermischen Leitfähigkeit L:

$$\text{Def: } L = \frac{1}{R} = \frac{\dot{Q}}{\Delta T} \quad \text{Gl. 4.6}$$

Um den thermischen Widerstand an einem Zylinder in radialer Richtung zu berechnen, müssen wir zunächst die Temperaturdifferenz in Funktion des Radius bestimmen. Da der Wärmefluss  $\dot{Q}$  zwischen zwei Masseknoten konstant ist, gilt

$$\dot{q} = \frac{dT}{dr} \cdot \lambda = \frac{\dot{Q}}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot dl} \quad \text{Gl. 4.7}$$

Durch Integration zwischen dem Radius  $r_1$  und  $r_2$  lässt sich daraus der Temperaturabfall zwischen zwei Masseknoten berechnen als

$$\Delta T = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\dot{Q}}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot dl \cdot \lambda} dr = \frac{\dot{Q}}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot dl} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} \quad \text{Gl. 4.8}$$

Die thermische Leitfähigkeit zwischen dem Radius  $r_i$  und  $r_{i+1}$  beträgt somit

$$L = \frac{1}{R} = \frac{2 \cdot \pi \cdot dl \cdot \lambda}{\ln \frac{r_{i+1}}{r_i}} \quad \text{Gl. 4.9}$$

Der thermische Widerstand  $R_1 = 1/L_1$  ist definiert als der Widerstand zwischen dem ersten Massenknoten auf dem Radius  $rz_1$  in der Hinterfüllung und dem Sondenfluid:

$$\text{Def: } L_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{\dot{Q}}{T_f - T_1} \quad \text{Gl. 4.10}$$

Bei Doppel-U-Sonden ist für die mittlere Temperatur im Sondenfluid

$$T_f = 0.5 \cdot (T_{up} + T_{down}) \quad \text{U-Sonden} \quad \text{Gl. 4.11}$$

einzusetzen, bei Koaxialsonden ist die Fluidtemperatur im äusseren Sondenrohr einzusetzen, was in aller Regel das hinunterfliessende Sondenfluid ist:

$$T_f = T_{down} \quad \text{Koaxial - Sonden} \quad \text{Gl. 4.12}$$

Für die folgenden Widerstände ergibt dies

$$R_2 = \frac{1}{L_2} = \frac{1}{2\pi dl} \left( \frac{1}{\lambda_{\text{Fill}}} \ln \frac{r_1}{rz_1} + \frac{1}{\lambda_{\text{Erde}}} \ln \frac{rz_2}{r_1} \right) \quad \text{Gl. 4.13}$$

$$R_3 = \frac{1}{L_3} = \frac{1}{2\pi dl} \frac{1}{\lambda_{\text{Erde}}} \ln \frac{rz_3}{rz_2} \quad \text{Gl. 4.14}$$

Analog zu den thermischen Leitfähigkeiten in der Erde kann auch in der Sole die Leitfähigkeit  $L_0$  definiert werden als

$$\text{Def: } L_0 = \frac{1}{R_0} = \frac{\dot{Q}_{\text{Ein}} - \dot{Q}_{\text{Aus}}}{T_{\text{Ein}} - T_{\text{Aus}}} = cp_{\text{Sole}} \cdot \dot{m} \quad \text{Gl. 4.15}$$

### 4.3 Wärmeübergangskoeffizient $\alpha$ beim Betrieb der Erdwärmesonde

Der Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha$  vom Fluid an die Sondenrohre ist eine Funktion der mit dem Rohrdurchmesser  $D_i$  gebildeten Reynoldszahl  $Re$  und der Prandtlzahl der Sole. Der Wärmeübergangskoeffizient wird üblicherweise dimensionslos mit der Nusseltzahl  $Nu$  für die ausgebildete Rohrströmung angegeben:

$$Nu(Re, Pr) = \frac{\alpha \cdot D_i}{\lambda_{Sole}} \quad \text{Gl. 4.16}$$

wobei

$$Re = \frac{v \cdot D_i}{\nu_{Sole}} \quad \text{Gl. 4.17}$$

$$Pr = \frac{\nu_{Sole} \rho_{Sole} c p_{Sole}}{\lambda_{Sole}} \quad \text{Gl. 4.18}$$

Je nach Reynoldszahl befinden wir uns im laminaren Bereich ( $Re < 2 \cdot 10^3$ ), dem Übergangsbereich laminar-turbulent ( $2 \cdot 10^3 < Re < 10^4$ ) oder im turbulenten Bereich ( $Re > 10^4$ ). Nach Merker (1987) kann im turbulenten Bereich  $10^4 < Re < 5 \cdot 10^6$  und für alle Fluide mit einer Prandtlzahl von  $0.5 < Pr < 2 \cdot 10^3$  die Petukhov - Formel angewendet werden:

$$Nu_{turb} = \frac{\frac{\xi}{8}}{K_1 + K_2 \sqrt{\frac{\xi}{8}} (Pr^{2/3} - 1)} Re Pr \quad \text{Gl. 4.19}$$

mit

$$K_1 = 1 + 27.2 \left( \frac{\xi}{8} \right) \quad \text{Gl. 4.20}$$

$$K_2 = 11.7 + 1.8 Pr^{-1/3} \quad \text{Gl. 4.21}$$

$$\xi = \frac{1}{(1.82 \log Re - 1.64)^2} \quad \text{Gl. 4.22}$$

Für Reynoldszahlen  $Re < 2'300$  liegen wir immer im laminaren Bereich, für den Merker (1987) die folgende Nusseltzahl angibt:

$$Nu_{lam} = 4.36 \quad \text{Gl. 4.23}$$

Zwischen dem laminaren und dem turbulenten Bereich liegt ein Übergangsbereich ( $2'300 < Re < 10'000$ ). In diesem Bereich wurde ein stetiger Ansatz für die Nusseltzahl gewählt, der analog zum turbulenten Bereich von einer exponentiellen Zunahme der Nusseltzahl mit der Reynoldszahl ausgeht (cf. Abb. 4.3 und Huber, Schuler, 1997):

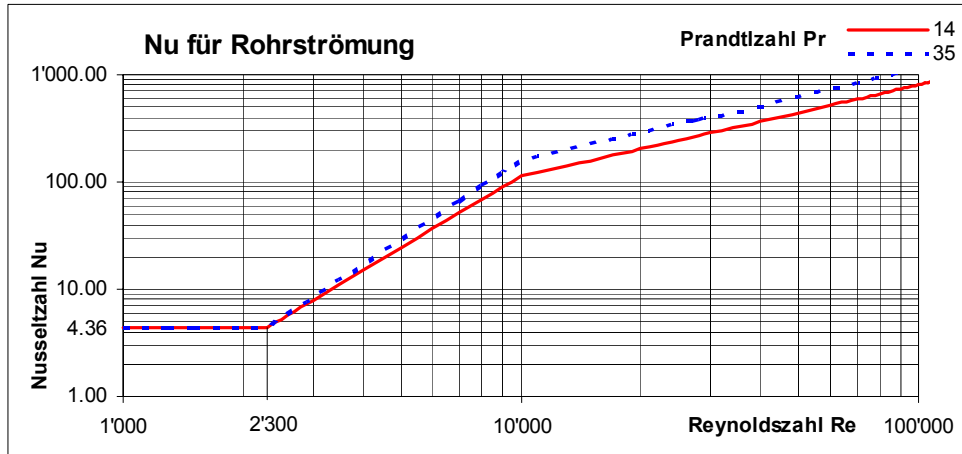


Abb. 4.3 Mittlere Nusseltzahl für die Rohrströmung in Abhängigkeit der Reynoldszahl Re

#### 4.4 Modell für Doppel – U- Sonden

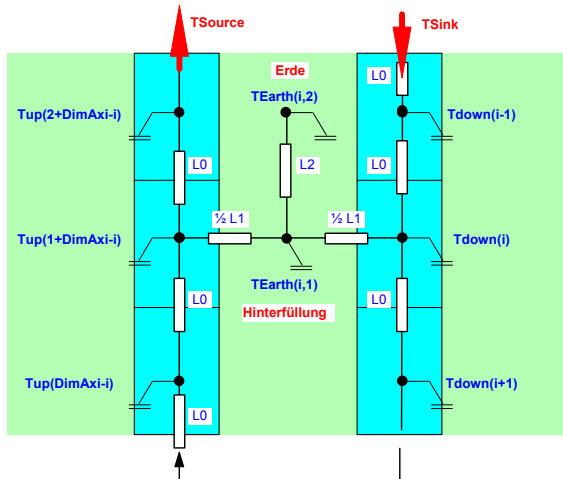


Abb. 4.4 Schematische Darstellung der U-Sonde

Nachfolgend ist der Rechengang für die Modellierung der Sole in der Doppel-U-Sonde kurz dargestellt. Für die folgenden Betrachtungen werden die beiden Sondenrohre zusammengefasst, in denen das Sondenfluid nach unten und diejenigen, bei denen sie hinaufströmt. Dabei gilt für die Strömungsgeschwindigkeit  $v$

$$v = \frac{\dot{m}}{2 \cdot \pi \cdot r_0^2 \cdot \rho_{Sole}} \quad \text{Gl. 4.24}$$

Analog zu den thermischen Leitfähigkeiten in der Erde kann auch in der Sole die Leitfähigkeit  $L_0$  definiert werden:

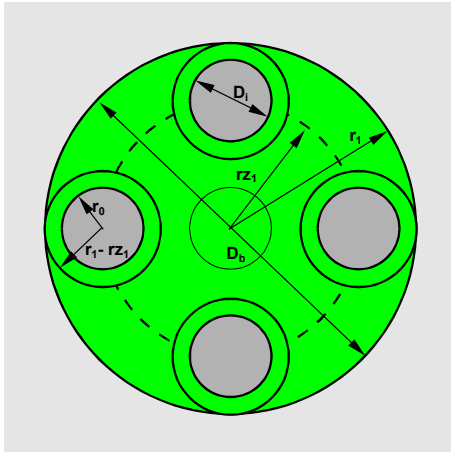
$$L_0 = \frac{\dot{Q}_{Ein} - \dot{Q}_{Aus}}{T_{Ein} - T_{Aus}} = c p_{Sole} \cdot \dot{m} = 2 \cdot \pi \cdot r_0^2 \cdot v \cdot \rho_{Sole} \cdot c p_{Sole} \quad \text{Gl. 4.25}$$

Wir stellen nun die Bilanz für das Sole-Element der Länge  $dl$  auf. Das Bilanzelement (bestehend aus den beiden zusammengefassten Sondenstücken der Doppel-U-Sonde) hat somit eine Masse  $m$  von

$$m = 2 \cdot \pi \cdot r_0^2 \cdot dl \cdot \rho_{Sole} \quad \text{Gl. 4.26}$$

Für den Widerstand  $R_1$  gibt es verschiedene Ansätze. Huber und Schuler (1997) haben den folgenden Ansatz aufgestellt:

$$R_1 = \frac{1}{L_1} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2\pi\alpha r_0 dl} + \frac{1}{2\pi\lambda_{Fill} dl} \ln \frac{r_1 - rz_1}{r_0} \right) \quad \text{Gl. 4.27}$$



Mit den Definitionen Gl. 3.22 und Gl. 3.23 von Hellström (1991) und Gl. 4.27 und Gl. 4.13 lassen sich  $R_1$  und  $R_2$  auch schreiben als

$$R_1 = \frac{R_a}{4 \, dl} \quad \text{Gl. 4.28}$$

$$R_2 = \frac{(R_b - \frac{R_a}{4})}{dl} + \frac{1}{2 \pi \, dl} \frac{1}{\lambda_{\text{Erde}}} \ln \frac{r_z2}{r_1} \quad \text{Gl. 4.29}$$

Die Herleitung ist in (Huber, Schuler, 1997) zu finden.

Abb. 4.5 Querschnitt der U-Sonde

#### 4.4.1 Stationäre Berechnung der Sole:

Aus einer Energiebilanz für das Element  $i$  ergibt sich im stationären Fall für die hinunterfließende Sole

$$T_{\text{down}i} = \frac{\left( L_0 T_{\text{down}i-1} + \frac{L_1}{2} T_{\text{Earth}i,1} \right)}{\left( L_0 + \frac{L_1}{2} \right)} \quad \text{Gl. 4.30}$$

und

$$T_{\text{up}i} = \frac{\left( L_0 T_{\text{up}i-1} + \frac{L_1}{2} T_{\text{Earth}1+\text{DimAxi}-i,1} \right)}{\left( L_0 + \frac{L_1}{2} \right)} \quad \text{Gl. 4.31}$$

#### 4.4.2 Instationäre Berechnung der Sole:

Für die Modellierung der Sole kann auch ein dynamischer Ansatz gewählt werden. Die Soletemperatur wird dabei mit einem expliziten Zeitschrittverfahren berechnet. Dadurch wird auch eine Erwärmung der Sole beim Stillstand der Solepumpe mitberücksichtigt.

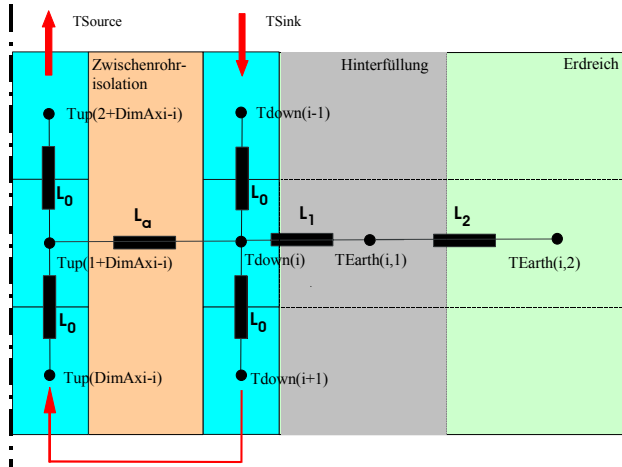
Aus der Energiebilanz für das Bilanzelement  $i$  ergibt sich so für die Soletemperatur  $T_{\text{down}i}$  der hinunterfließenden Sole:

$$T_{\text{down}k+1,i} = T_{\text{down}k,i} + (T_{\text{down}k+1,i-1} - T_{\text{down}k,i}) \cdot \frac{L_0 dt2}{mcp} + (T_{\text{Earth}k,i,1} - T_{\text{down}k,i}) \cdot \frac{L_1 dt2}{2mcp} \quad \text{Gl. 4.32}$$

und der hinaufströmenden Sole mit der Soletemperatur  $T_{\text{up}i}$ :

$$T_{\text{up}k+1,i} = T_{\text{up}k,i} + (T_{\text{up}k+1,i-1} - T_{\text{up}k,i}) \cdot \frac{L_0 dt2}{mcp} + (T_{\text{Earth}k,1+\text{DimAxi}-i,1} - T_{\text{up}k,i}) \cdot \frac{L_1 dt2}{2mcp} \quad \text{Gl. 4.33}$$

## 4.5 Modell für Koaxial – Sonden



Bei Koaxialsonden ist ein angepasstes Modell für die thermischen Widerstände  $L_1$  und  $L_a$  gemäss Abb. 4.6 erforderlich. Für den thermischen Widerstand  $L_0$  gilt gleich wie bei Doppel-U-Sonden:

$$L_0 = \frac{1}{R_0} = cp_{Sole} \cdot \dot{m} \quad \text{Gl. 4.34}$$

Abb. 4.6 Schematische Darstellung der Koaxialsonde

Der thermische Widerstand  $R_1$  kann nach der Definition Gl. 4.10 und Gl. 4.12 berechnet werden mit

$$R_1 = \frac{1}{L_1} = \left( \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \alpha \cdot r_0 \cdot dl} + \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda_s \cdot dl} \cdot \ln \frac{r_s}{r_0} + \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda_{Fill} \cdot dl} \cdot \ln \frac{r_1 - rz_1}{r_s} \right) \quad \text{Gl. 4.35}$$

In der Schreibweise mit  $R_b$  ist dies

$$R_1 = \frac{1}{L_1} = \frac{R_b}{dl} - \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot dl} \cdot \left( \frac{1}{\lambda_{Fill}} \cdot \ln \frac{r_1}{rz_1} \right) \quad \text{Gl. 4.36}$$

Der Widerstand zwischen den beiden Sondenrohren kann berechnet werden mit

$$\frac{1}{L_a} = \frac{R_a}{dl} = \left( \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \alpha_i \cdot r_i \cdot dl} + \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda_w \cdot dl} \cdot \ln \frac{r_a}{r_i} + \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \alpha_a \cdot r_a \cdot dl} \right) \quad \text{Gl. 4.37}$$

### 4.5.1 Stationäre Berechnung der Sole

Für die stationäre Berechnung von Koaxialen Sonden wurde im Programm-Modul EWS das folgende Modell eingebaut (Quellcode im Anhang):

$$Tdown_i = \frac{(L_0 \cdot Tdown_{i-1} + L_1 \cdot TEarth_{i,1} + L_a \cdot Tup_{1+DimAxi-i})}{(L_0 + L_1 + L_a)} \quad \text{Gl. 4.38}$$

und

$$Tup_i = \frac{(L_0 \cdot Tup_{i-1} + L_a \cdot Tdown_{1+DimAxi-i})}{(L_0 + L_a)} \quad \text{Gl. 4.39}$$



#### 4.5.2 Instationäre Berechnung der Sole:

Für die Instationäre Berechnung von Koaxialen Sonden wurde im Programm-Modul EWS das folgende Modell eingebaut (Quellcode im Anhang):

$$T_{down_{k+1,i}} = T_{down_{k,i}} + (T_{down_{k+1,i-1}} - T_{down_{k,i}}) \frac{L_0 dt 2}{m cp} + (T_{Earth_{k,i,1}} - T_{down_{k,i}}) \frac{L_1 dt 2}{m cp} + (T_{up_{k,i}} - T_{down_{k,i}}) \frac{L_a dt 2}{m cp} \quad \text{Gl. 4.40}$$

und

$$T_{up_{k+1,i}} = T_{up_{k,i}} + (T_{up_{k+1,i-1}} - T_{up_{k,i}}) \frac{L_0 dt 2}{m cp} - (T_{up_{k,i}} - T_{down_{k,1+DimAxi-i}}) \frac{L_a dt 2}{m cp} \quad \text{Gl. 4.41}$$

## 5 Rechenresultate

### 5.1 Erreichbare Werte an der homogenen Doppel-U-Sonde

#### 5.1.1 Erreichbare Temperaturen, berechnete mit der Erdwärmesondengleichung

Die nachfolgenden Grafiken zeigen die erreichbare Quellentemperaturen bei einer homogenen Erdwärmesonde mit 500m und 600m Bohrtiefe nach 31 Tagen Dauerbetrieb bei 5kW Entzugsleistung, einer Wärmeleitfähigkeit der Erde von 2.6W/mK und der Hinterfüllung von 0.81 W/mK, einer mittleren Oberflächentemperatur von 11°C bei einem Gradienten von 0.035K/m und einem Durchsatz von 0.8kg/s, berechnet mit den Gleichungen Gl. 3.37 und Gl. 3.10.

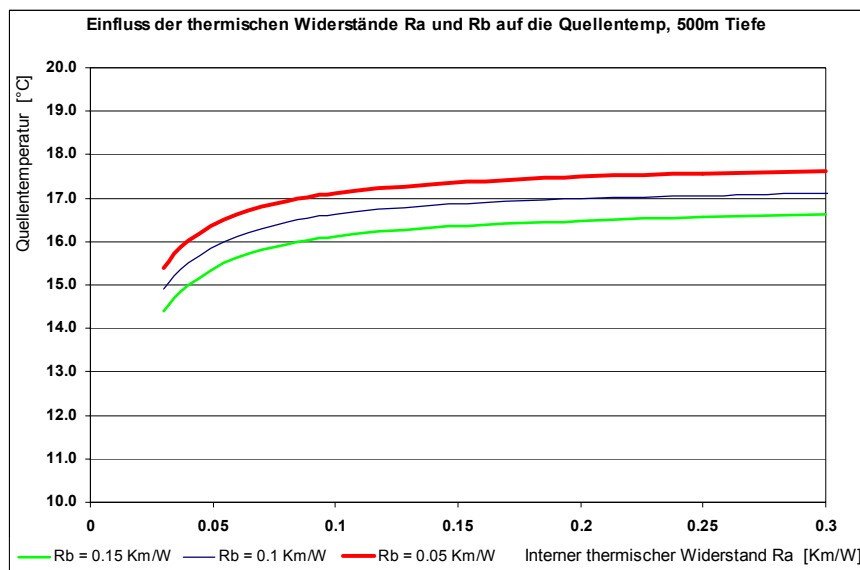


Abb. 5.1 Einfluss von  $R_a$  und  $R_b$  auf die Quellentemperatur der Sonde am Beispiel einer 500m tiefen Doppel-U-Sonde 50 mm mit einem Sondendurchsatz von 0.8 kg/s Wasser bei einer Entzugsleistung von 5 kW und 31 Tagen Dauerbetrieb (Sprungantwort). Wärmeleitfähigkeit der Erde  $\lambda_{\text{Earth}} = 2.6 \text{ W/mK}$ , Jahresdurchschnittstemperatur der Oberfläche 11°C, Temperaturgradient 3.5°C/100m, Bohrdurchmesser 15cm.

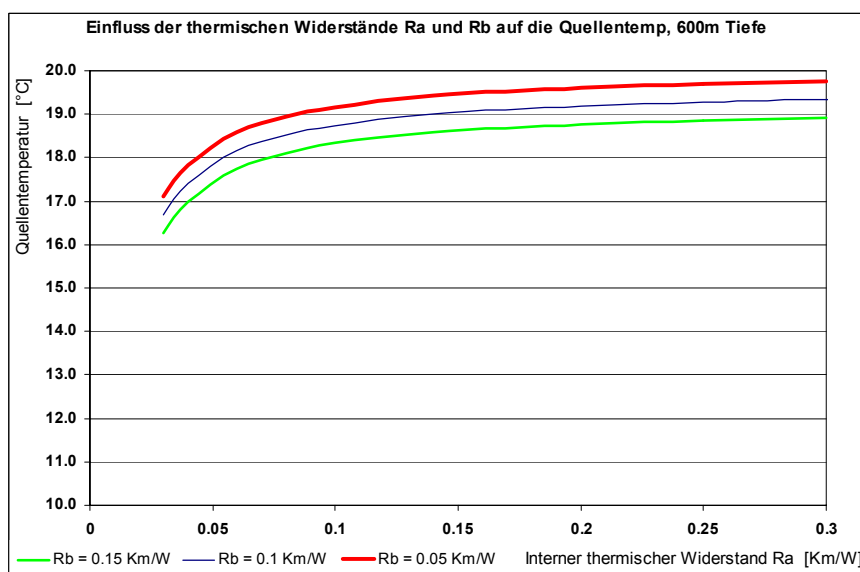


Abb. 5.2 Einfluss von  $R_a$  und  $R_b$  auf die Quellentemperatur der Sonde am Beispiel einer 600m tiefen Doppel-U-Sonde 50 mm mit einem Sondendurchsatz von 0.8 kg/s Wasser bei einer Entzugsleistung von 5 kW und 31 Tagen Dauerbetrieb (Sprungantwort). Wärmeleitfähigkeit der Erde  $\lambda_{\text{Earth}} = 2.6 \text{ W/mK}$ , Jahresdurchschnittstemperatur der Oberfläche 11°C, Temperaturgradient 3.5°C/100m, Bohrdurchmesser 15cm.

### 5.1.2 Erreichbare Rücklauftemperaturen, berechnete mit der Erdsondengleichung

Die nachfolgenden Grafiken zeigen die erreichbare Rücklauftemperatur bei einer homogenen Erdwärmesonde mit 500m und 600m Bohrtiefe nach 31 Tagen Dauerbetrieb bei 5kW Entzugsleistung, einer Wärmeleitfähigkeit der Erde von 2.6W/mK und der Hinterfüllung von 0.81 W/mK, einer mittleren Oberflächentemperatur von 11°C bei einem Gradienten von 0.035K/m und einem Durchsatz von 0.8kg/s, berechnet mit den Gleichungen Gl. 3.37 und Gl. 3.10.

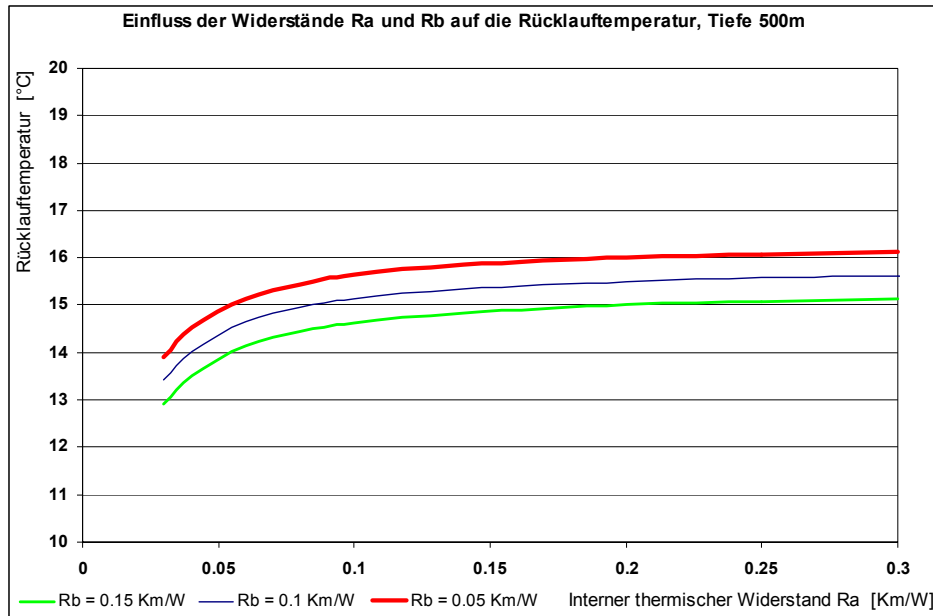


Abb. 5.3 Einfluss von  $R_a$  und  $R_b$  auf die Rücklauftemperatur der Sonde am Beispiel einer 500m tiefen Doppel-U-Sonde 50 mm mit einem Sondendurchsatz von 0.8 kg/s Wasser bei einer Entzugsleistung von 5 kW und 31 Tagen Dauerbetrieb (Sprungantwort). Wärmeleitfähigkeit der Erde  $\lambda_{Earth} = 2.6 \text{ W/mK}$ , Jahresdurchschnittstemperatur der Oberfläche 11°C, Temperaturgradient 3.5°C/100m, Bohrdurchmesser 15cm.

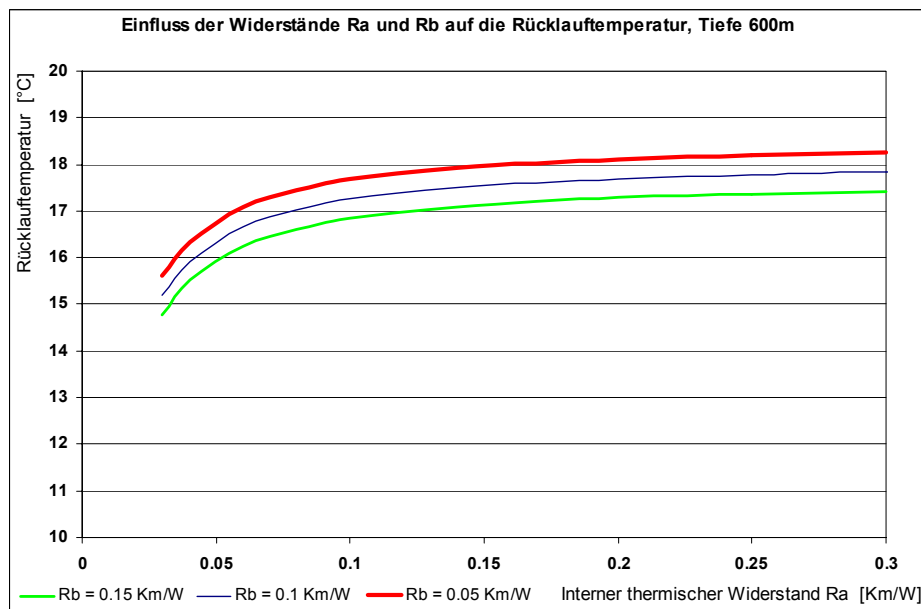


Abb. 5.4 Einfluss von  $R_a$  und  $R_b$  auf die Quelltemperatur der Sonde am Beispiel einer 600m tiefen Doppel-U-Sonde 50 mm mit einem Sondendurchsatz von 0.8 kg/s Wasser bei einer Entzugsleistung von 5 kW und 31 Tagen Dauerbetrieb (Sprungantwort). Wärmeleitfähigkeit der Erde  $\lambda_{Earth} = 2.6 \text{ W/mK}$ , Jahresdurchschnittstemperatur der Oberfläche 11°C, Temperaturgradient 3.5°C/100m, Bohrdurchmesser 15cm.

### 5.1.3 Erreichbare Temperaturen, berechnet mit dem EWS-Modul (10 Schichten)

Die nachfolgenden Grafiken zeigen die erreichbare Quellentemperaturen bei einer homogenen Erdwärmesonde mit 500m und 600m Bohrtiefe nach 31 Tagen Dauerbetrieb mit 5kW Entzugsleistung, einer Wärmeleitfähigkeit der Erde von 2.6W/mK und der Hinterfüllung von 0.81 W/mK, einer mittleren Oberflächentemperatur von 11°C bei einem Gradienten von 0.035K/m und einem Durchsatz von 0.8kg/s, berechnet mit dem EWS-Modul mit 10 Schichten.

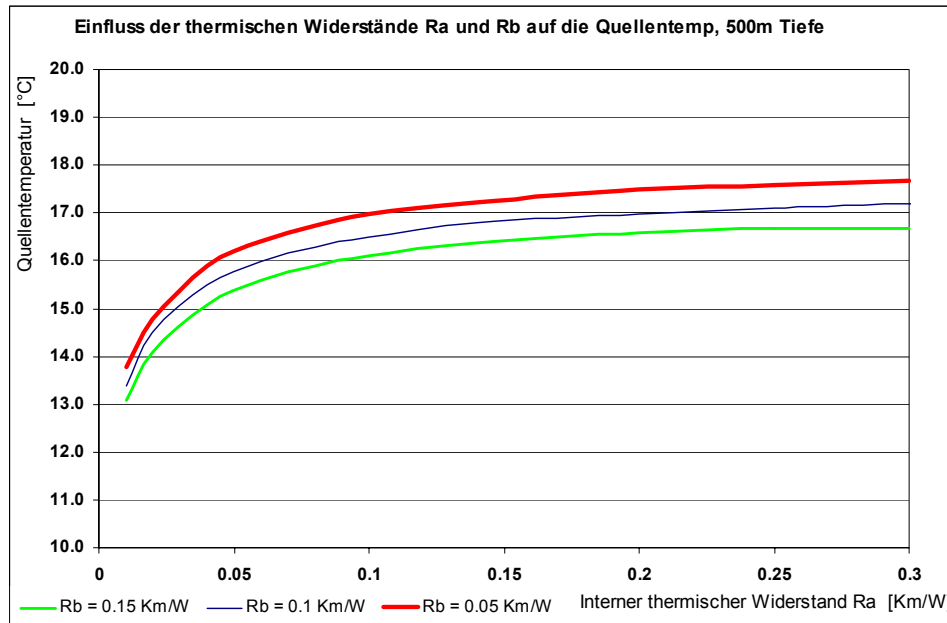


Abb. 5.5 Einfluss von Ra und Rb auf die Quellentemperatur der Sonde am Beispiel einer 500m tiefen Doppel-U-Sonde 50 mm mit einem Sondendurchsatz von 0.8 kg/s Wasser bei einer Entzugsleistung von 5 kW und 31 Tagen Dauerbetrieb (Sprungantwort). Wärmeleitfähigkeit der Erde  $\lambda_{Earth} = 2.6 \text{ W/mK}$ , Jahresdurchschnittstemperatur der Oberfläche 11°C, Temperaturgradient 3.5°C/100m, Bohrdurchmesser 15cm.

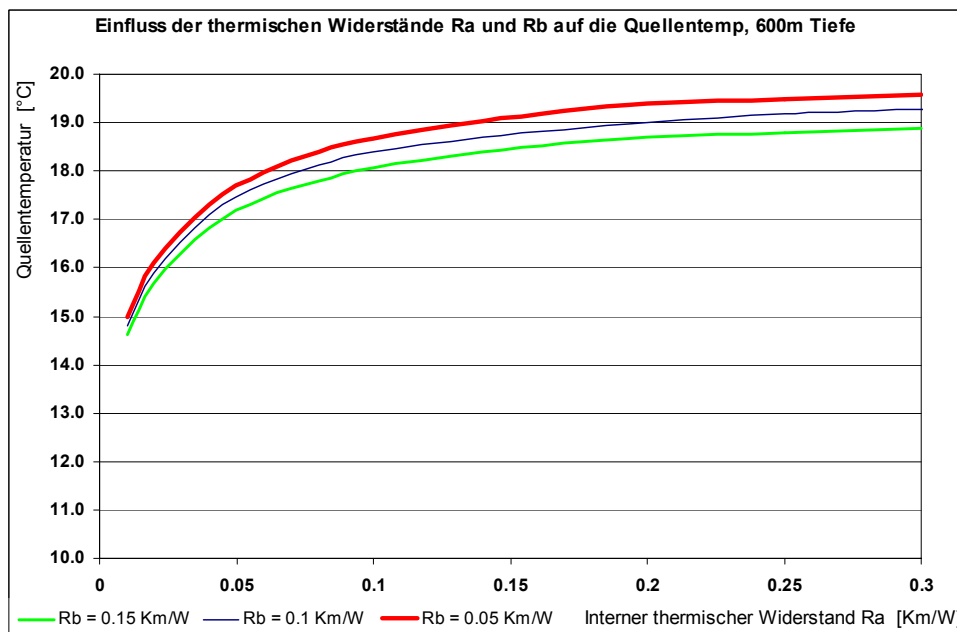


Abb. 5.6 Einfluss von Ra und Rb auf die Quellentemperatur der Sonde am Beispiel einer 600m tiefen Doppel-U-Sonde 50 mm mit einem Sondendurchsatz von 0.8 kg/s Wasser bei einer Entzugsleistung von 5 kW und 31 Tagen Dauerbetrieb (Sprungantwort). Wärmeleitfähigkeit der Erde  $\lambda_{Earth} = 2.6 \text{ W/mK}$ , Jahresdurchschnittstemperatur der Oberfläche 11°C, Temperaturgradient 3.5°C/100m, Bohrdurchmesser 15cm.

#### 5.1.4 Erreichbare Rücklauftemperaturen, berechnet mit dem EWS-Modul

Die nachfolgenden Grafiken zeigen die erreichbare Rücklauftemperatur bei einer homogenen Erdwärmesonde mit 500m und 600m Bohrtiefe nach 31 Tagen Dauerbetrieb mit 5kW Entzugsleistung, einer Wärmeleitfähigkeit der Erde von 2.6W/mK und der Hinterfüllung von 0.81 W/mK, einer mittleren Oberflächentemperatur von 11°C bei einem Gradienten von 0.035K/m und einem Durchsatz von 0.8kg/s, berechnet mit dem EWS-Modul mit 10 Schichten.

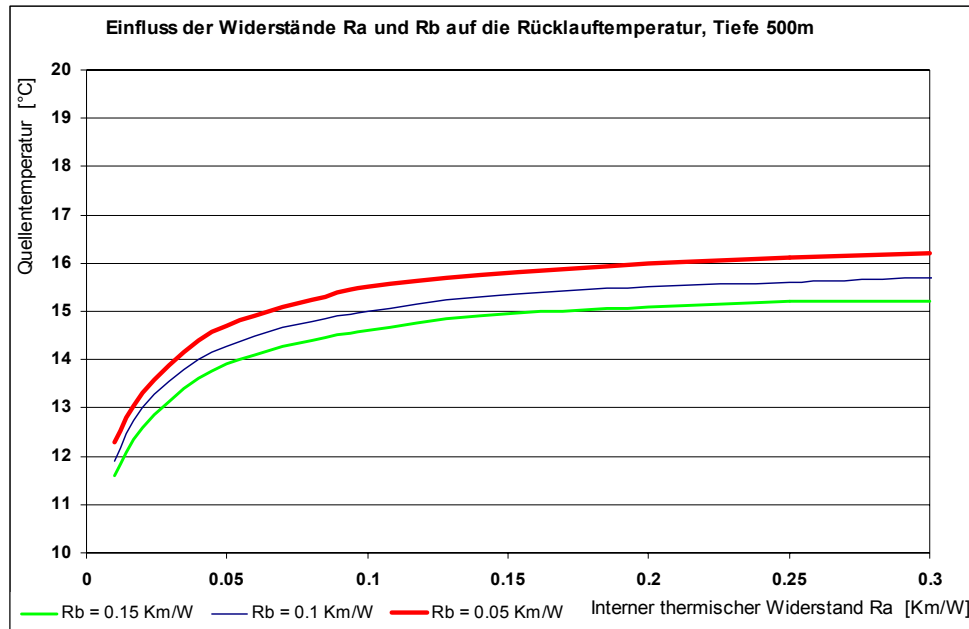


Abb. 5.7 Einfluss von Ra und Rb auf die Rücklauftemperatur der Sonde am Beispiel einer 500m tiefen Doppel-U-Sonde 50 mm mit einem Sondendurchsatz von 0.8 kg/s Wasser bei einer Entzugsleistung von 5 kW und 31 Tagen Dauerbetrieb (Sprungantwort). Wärmeleitfähigkeit der Erde  $\lambda_{Earth} = 2.6$  W/mK, Jahresdurchschnittstemperatur der Oberfläche 11°C, Temperaturgradient 3.5°C/100m, Bohrdurchmesser 15cm.

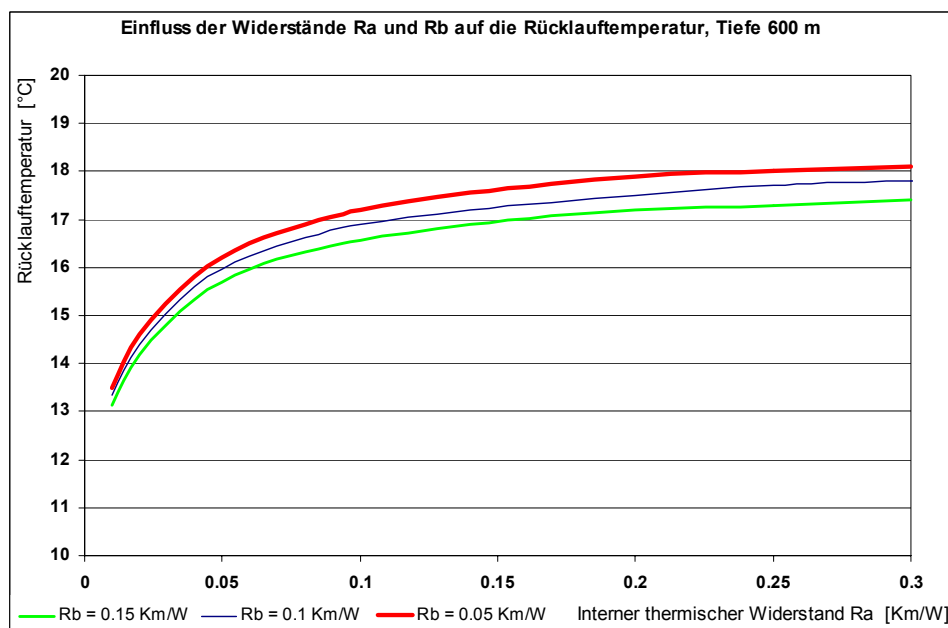


Abb. 5.8 Einfluss von Ra und Rb auf die Rücklauftemperatur der Sonde am Beispiel einer 600m tiefen Doppel-U-Sonde 50 mm mit einem Sondendurchsatz von 0.8 kg/s Wasser bei einer Entzugsleistung von 5 kW und 31 Tagen Dauerbetrieb (Sprungantwort). Wärmeleitfähigkeit der Erde  $\lambda_{Earth} = 2.6$  W/mK, Jahresdurchschnittstemperatur der Oberfläche 11°C, Temperaturgradient 3.5°C/100m, Bohrdurchmesser 15cm.

### 5.1.5 Wärmeleitfähigkeiten der Hinterfüllung $\lambda_{\text{Fill}}$

In Abb. 3.7 wurde gezeigt, welche thermischen Widerstände im Bohrloch bei unterschiedlichen Hinterfüllungs-Wärmeleitfähigkeiten  $\lambda_{\text{Fill}}$  von 0.4 W/mK bis 1.5 W/mK erreichbar sind. Es stellt sich nun die Frage, welche Werte heute maximal in der Praxis erreichbar sind und welche Quellentemperaturen bei tiefen Erdwärmesonden damit erreichbar sind.

Die Firma STÜWA Konrad Stükerjürgen GmbH in D-33397 Rietberg – Varenseil bietet eine Hinterfüllung unter dem Handelsnamen „Stüwatherm“ an, die eine Wärmeleitfähigkeit von 2.0 W/mK hat. Erreicht wird dieser Wert durch die Zugabe von gesiebttem Quarz-Korn mit Korngrößen unter 1 mm und 25 – 30% Tonanteil (bezogen auf die Trockensubstanz). Diese Mischung wird mit Zement und Wasser zu einer Suspension gemischt und wie die herkömmlichen Zement – Bentonitmischungen angewendet.

### 5.1.6 Rechenergebnisse mit Programm EWS in homogenen Doppel – U - Sonden

Abb. 5.9 zeigt die erreichbaren Quellen- und Rücklauftemperaturen in einer 600m tiefen, homogenen Erdwärmesonde mit einer gut wärmeleitenden Hinterfüllung mit  $\lambda_{\text{Fill}}=1.5$  W/mK und einer schlecht wärmeleitenden Hinterfüllung  $\lambda_{\text{Fill}}=0.4$  W/mK. Die Resultate sind fast deckungsgleich, die Hinterfüllung scheint bei tiefen Erdwärmesonden für hohe Rücklauftemperaturen zweitrangig zu sein. Eher erstaunlich auch das Resultat, dass der Einfluss der Exzentrizität auch nur gering ist.

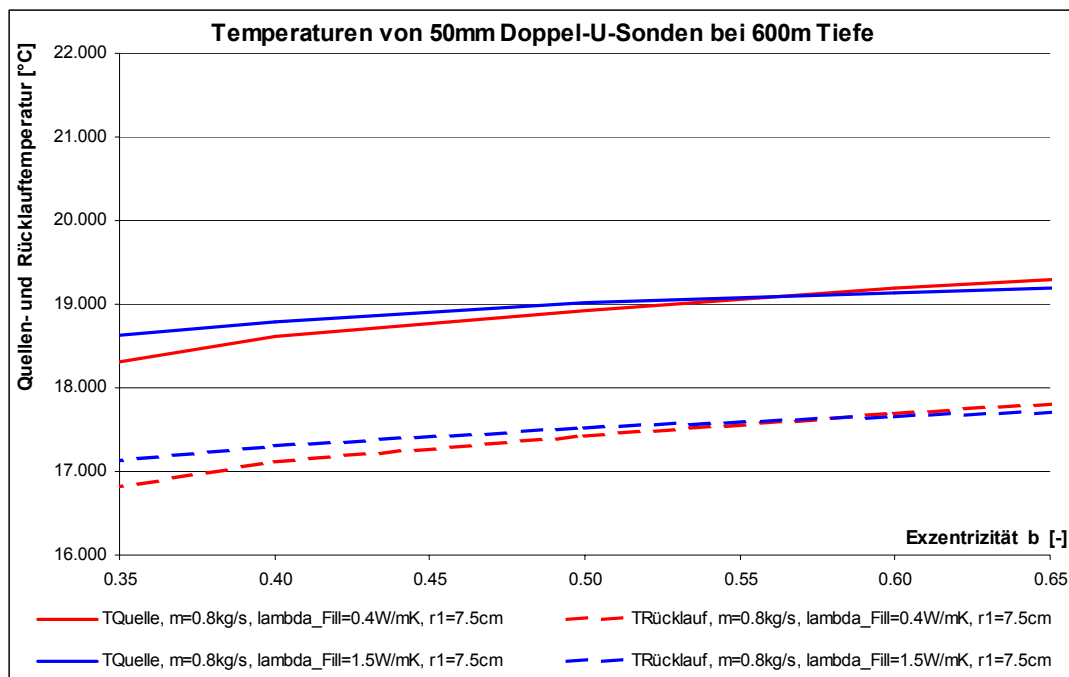


Abb. 5.9 Quellentemperaturen und Rücklauftemperaturen in Funktion der Exzentrizität  $b$  für homogene Doppel-U-Sonde von 600m Tiefe. Der Sondendurchsatz beträgt 0.8 kg/s Wasser bei einer Entzugsleistung von 5 kW und 31 Tagen Dauerbetrieb (Sprungantwort). Wärmeleitfähigkeit der Erde  $\lambda_{\text{Earth}} = 2.6$  W/mK, Jahresdurchschnittstemperatur der Oberfläche 11°C, Temperaturgradient 3.5°C/100m, Bohrdurchmesser 15cm.

### 5.1.7 Asymmetrische Sondenrohr-Anordnung

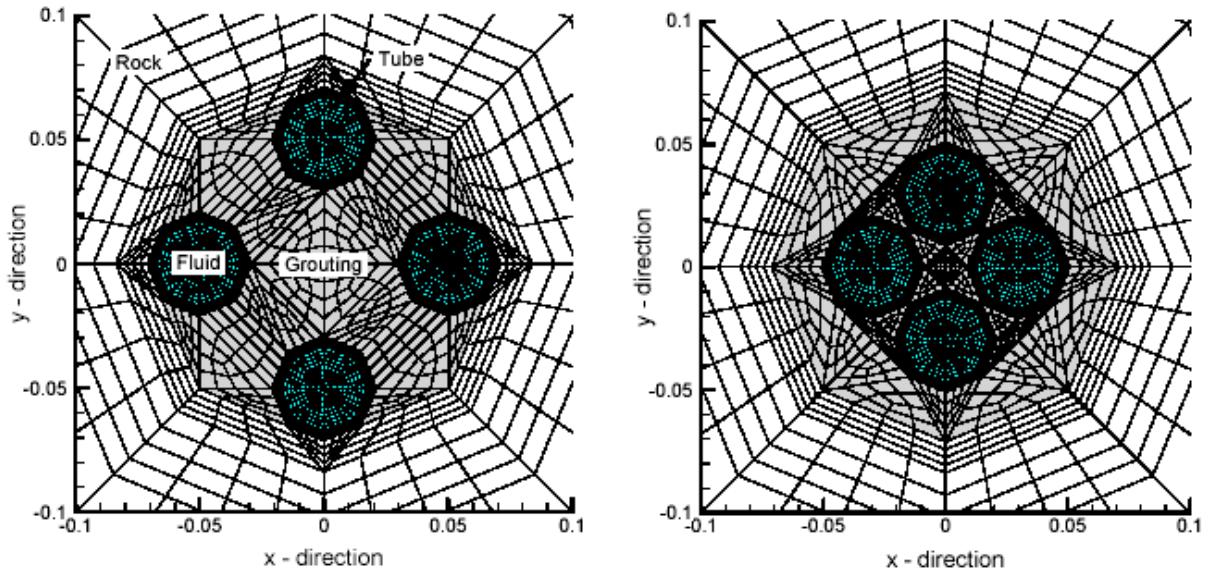


Abb. 5.10 Anordnung der Sondenrohre in der Bohrung: Links Anordnung mit grosser Exzentrizität (Modell A), rechts mit kleiner Exzentrizität (Modell B) [Signorelli, 2004]

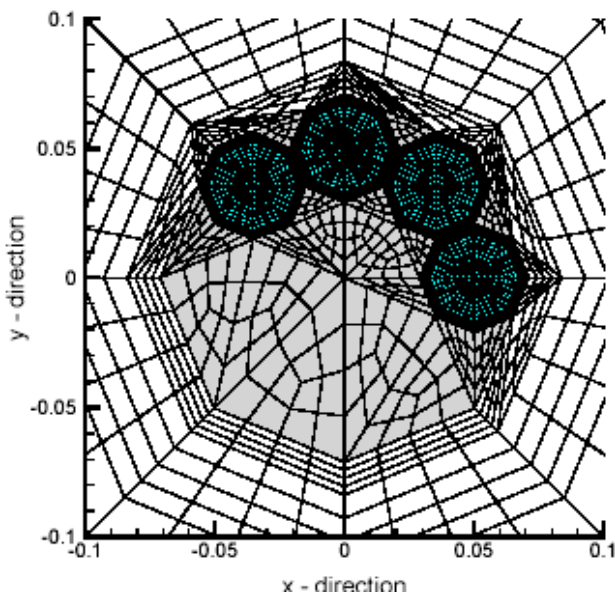


Abb. 5.11 Asymmetrische Anordnung (Modell C) [Signorelli, 2004]

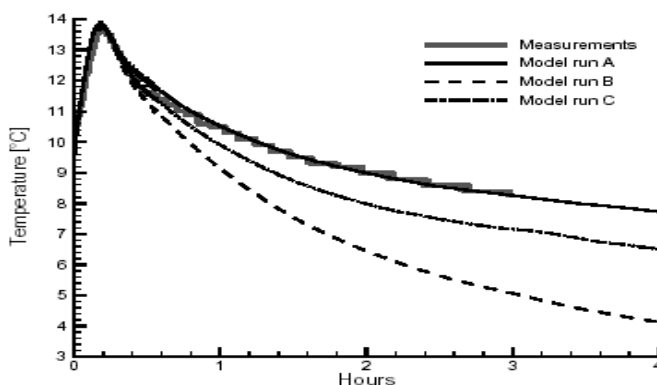


Abb. 5.12 Vergleich Quellentemperaturen [Signorelli, 2004]

In Kapitel 3.3.3 und Kapitel 5.1 wurde untersucht, wie sich die Exzentrizität auf die erreichbaren Quellentemperaturen auswirkt. Dabei wurde entsprechend Abb. 5.10 von einer symmetrischen Anordnung der Sondenrohre in der Bohrung ausgegangen.

In der Realität liegen die Sondenrohre allerdings meist asymmetrisch in der Bohrung (cf. Abb. 5.11). Signorelli hat untersucht, wie sich diese Asymmetrie auf die Quellentemperatur auswirkt. In dieser Arbeit konnte gezeigt werden, dass die Quellentemperaturen bei asymmetrischer Anordnung zwischen den beiden Extremen aus Abb. 5.10 liegen.

Abb. 5.12 zeigt den Vergleich der Quellentemperatur bei symmetrischer Anordnung mit grosser Exzentrizität (Modell A), bei symmetrischer Anordnung mit kleiner Exzentrizität (Modell B) und bei asymmetrischer Anordnung der Sondenrohre in der Bohrung (Modell C). Auch bei längerer Simulation liegt die asymmetrische Anordnung immer zwischen den Extrema der Modelle A und B.

## 5.2 Inhomogene Doppel-U-Sonden

### 5.2.1 Inhomogene Hinterfüllung

In diesem Abschnitt soll untersucht werden, wie stark eine unterschiedliche Hinterfüllung die Quelltemperatur bei einer 600m tiefen Doppel-U-Sonde erhöhen kann. Dazu soll die Hinterfüllung in den ersten 300m mit einem schlecht leitenden Material mit Wärmeleitfähigkeit  $\lambda_{\text{Fill}} = 0.4 \text{ W/mK}$  und der untere Teil mit einem gut leitenden Material mit Wärmeleitfähigkeit  $\lambda_{\text{Fill}} = 1.5 \text{ W/mK}$  gefüllt werden. Verglichen werden soll diese inhomogen hinterfüllte Sonde mit 2 homogen hinterfüllten Sonden mit einer Wärmeleitfähigkeit von  $\lambda_{\text{Fill}} = 0.4 \text{ W/mK}$  und von  $\lambda_{\text{Fill}} = 1.5 \text{ W/mK}$ . Die Berechnung wird durchgeführt mit dem EWS-Modul mit 10 Schichten bei einer Sprungantwort von 31 Tagen mit einer Entzugsleistung von 5 kW, einer Wärmeleitfähigkeit des Bodens von  $2.6 \text{ W/mK}$ , einer mittleren Bodenoberflächentemperatur von  $11^\circ\text{C}$  und einem Temperaturgradienten von  $0.035 \text{ K/m}$ .

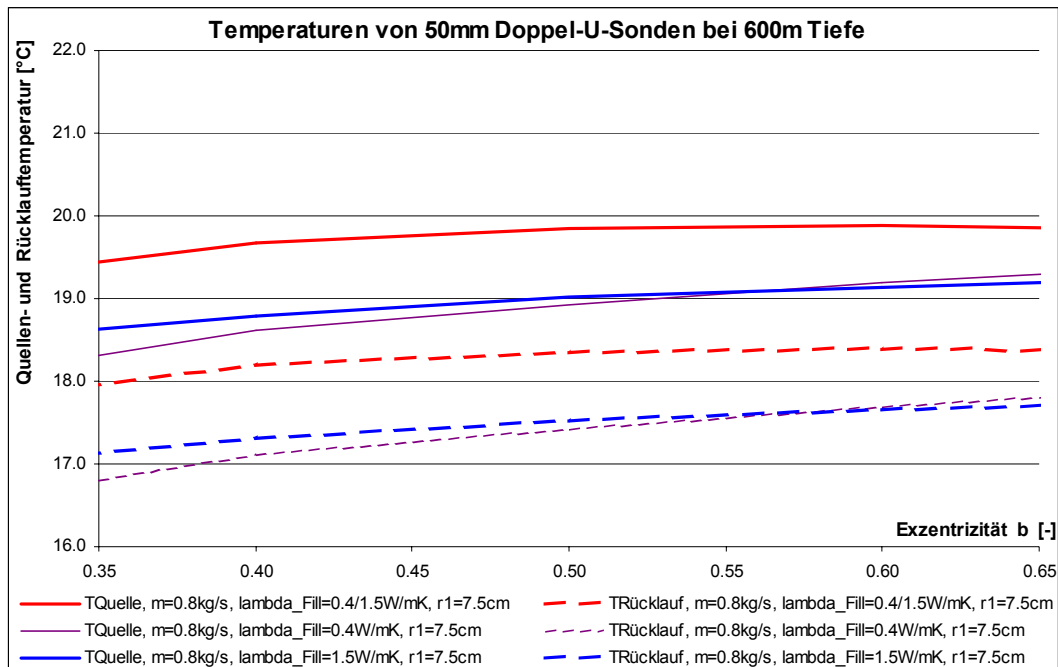


Abb. 5.13 Einfluss der Exzentrizität  $b$  auf die Quellen- und Rücklauftemperatur der Sonde am Beispiel einer 600m tiefen Doppel-U-Sonde 50 mm mit einem Sondendurchsatz von  $0.8 \text{ kg/s}$  Wasser bei einer Entzugsleistung von  $5 \text{ kW}$  und 31 Tagen Dauerbetrieb (Sprungantwort). Wärmeleitfähigkeit der Erde  $\lambda_{\text{Earth}} = 2.6 \text{ W/mK}$ , Jahresdurchschnittstemperatur der Oberfläche  $11^\circ\text{C}$ , Temperaturgradient  $3.5^\circ\text{C}/100\text{m}$ , Bohrdurchmesser  $15\text{cm}$ .

Die Berechnung zeigt, dass die mögliche Temperaturerhöhung weniger als  $1^\circ\text{C}$  beträgt, verglichen mit den homogenen Referenzsonden.



Als weitere Verbesserungsmöglichkeit wäre als Hinterfüllung oben Schaumzement mit einer Wärmeleitfähigkeit von 0.16 W/mK und einer Dichte von 360 kg/m<sup>3</sup> denkbar, unten ist eine Hinterfüllung mit Quarzsand mit einer Wärmeleitfähigkeit von 2.0 W/mK einsetzbar. Damit lässt sich die Quelltemperatur (=Fluidtemperatur am Sondenaustritt) nochmals um knapp 1°C erhöhen. Doch auch diese Massnahme reicht immer noch nicht aus, um mit einer 600m tiefen Doppel-U-Sonde ein Wohngebäude direkt zu beheizen (cf. Abb. 5.14). Auffallend auch hier wieder der sehr geringe Einfluss der Exzentrizität. Auch mit einer unterschiedlichen Exzentrizität oben und unten kann das Resultat nur marginal beeinflusst werden.

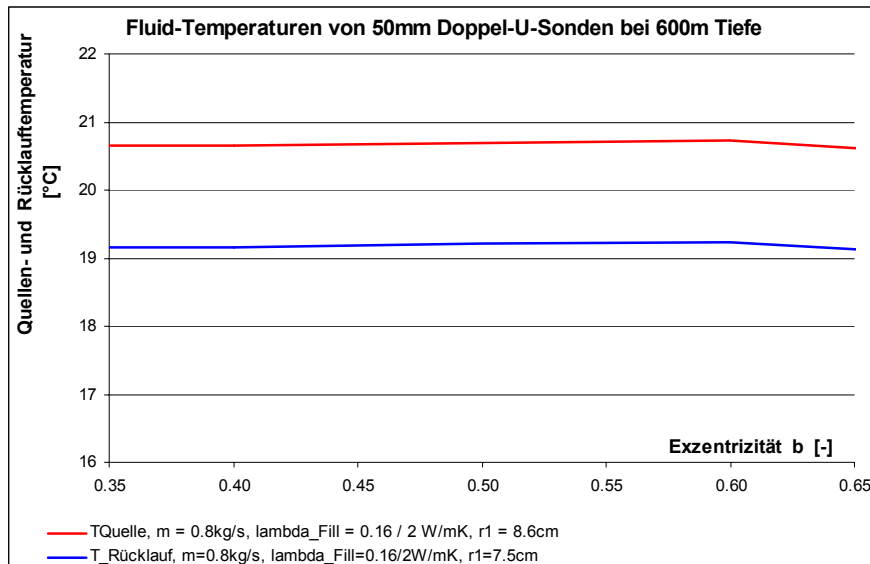


Abb. 5.14 Quellen- und Rücklauftemperatur des Sondenfluids einer 600m tiefen Doppel-U-Sonde 50 mm mit einer Schaumzementhinterfüllung mit  $\lambda_{\text{Fill}} = 0.16 \text{ W/mK}$  in den ersten 420m und mit einer Quarzsandhinterfüllung mit  $\lambda_{\text{Fill}} = 2.0 \text{ W/mK}$  bis auf 600m Tiefe. SONDENDURCHSATZ 0.8 kg/s, Entzugsleistung 5 kW und 31 Tagen Dauerbetrieb (Sprungantwort). Wärmeleitfähigkeit der Erde  $\lambda_{\text{Earth}} = 2.6 \text{ W/mK}$ , Jahresdurchschnittstemperatur der Oberfläche 11°C, Temperaturgradient 3.5°C/100m, Bohrdurchmesser 17.2cm.

Um mit einer 50mm Doppel-U-Sonde eine Direktheizung eines Wohngebäudes zu ermöglichen sind mindestens 800m Bohrtiefe notwendig (cf Abb. 5.15).

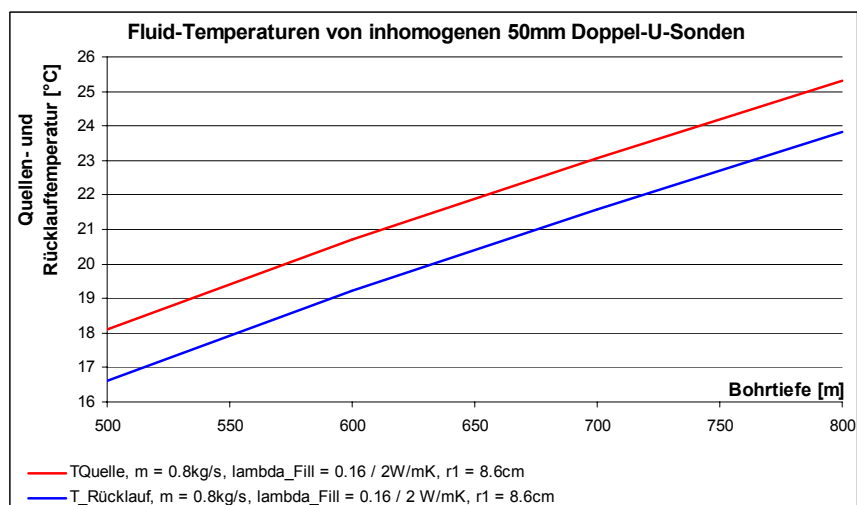


Abb. 5.15 Fluidtemperaturen von inhomogenen Doppel-U-Sonde 50 mm mit einer Schaumzementhinterfüllung mit  $\lambda_{\text{Fill}} = 0.16 \text{ W/mK}$  in den ersten 70% der Bohrtiefe und mit einer Quarzsandhinterfüllung mit  $\lambda_{\text{Fill}} = 2.0 \text{ W/mK}$  bis auf 600m Tiefe. SONDENDURCHSATZ 0.8 kg/s, Entzugsleistung 5 kW und 31 Tagen Dauerbetrieb (Sprungantwort). Wärmeleitfähigkeit der Erde  $\lambda_{\text{Earth}} = 2.6 \text{ W/mK}$ , Jahresdurchschnittstemperatur der Oberfläche 11°C, Temperaturgradient 3.5°C/100m, Bohrdurchmesser 17.2cm.

### 5.2.2 Einfluss der Entzugsleistung

In den bisherigen Berechnungen wurde stets das Beispiel einer Sonde mit 5 kW Entzugsleistung untersucht. Bei einer 600 m tiefen Erdwärmesonde entspricht dies einer Sondenbelastung (bezogen auf die ganze Bohrtiefe) von 8.33 W/m. Dies erscheint auf den ersten Blick sehr wenig. Bedenkt man aber, dass erst in ca. 400m Tiefe die unbeeinflusste Erdreichtemperatur über 25°C liegt, so wird schnell ersichtlich, dass eine tiefe Erdwärmesonde, die Quellen-Temperaturen von deutlich über 20°C fördern soll, nur der unterste Drittel der Sonde überhaupt zum Wärmeentzug aus dem Erdreich beitragen kann. Die restliche Bohrlänge dient einzig dem Transport des Wärmeträgers. Bezieht man die Entzugsleistung also auf die Bohrlänge, die unterhalb 400m Tiefe liegt, so entspricht 5 kW Entzugsleistung einer spezifischen Sondenbelastung von 25 W/m (bezogen auf den untersten Drittel der Bohrung). Dieser Wert liegt nur noch etwa 30% unter dem Wert, der auch bei untiefen Sonden ausgewählt wird, wenn das Sondenfluid ohne Frostschutzmittel betrieben wird.

In Abb. 5.16 wurde das Beispiel in Abb. 5.14 mit einer Exzentrizität von 0.5 mit unterschiedlichen Entzugsleistungen durchgerechnet. Klar ersichtlich wird dabei die starke Abhängigkeit der Quelltemperatur von der Sondenbelastung. Um eine gute Vergleichbarkeit zu erhalten wurde dabei der Sondendurchsatz proportional mit der Entzugsleistung erhöht.

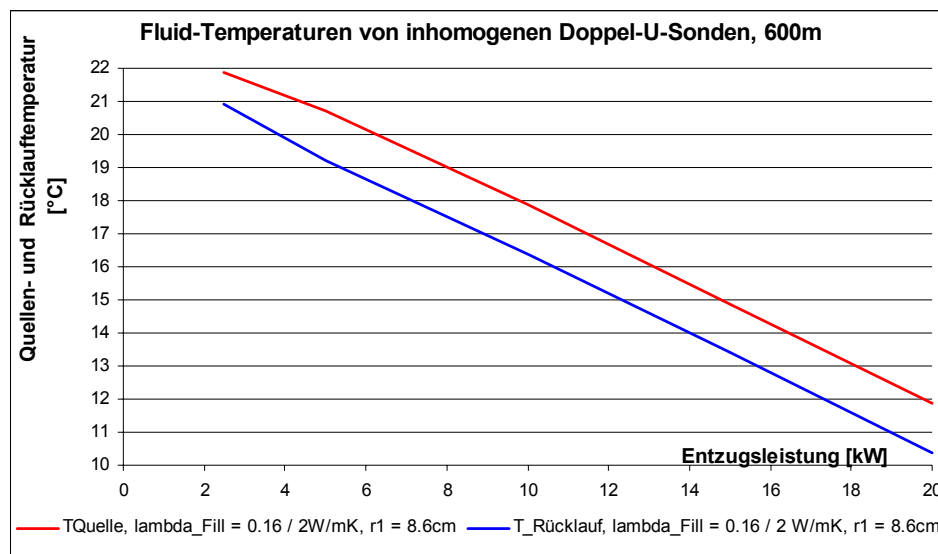


Abb. 5.16 Einfluss der Entzugsleistung auf die Fluidtemperaturen von inhomogenen Doppel-U-Sonde 50 mm mit einer Schaumzement hinterfüllung mit  $\lambda_{Fill} = 0.16 \text{ W/mK}$  in den ersten 70% der Bohrtiefe und mit einer Quarzsandhinterfüllung mit  $\lambda_{Fill} = 2.0 \text{ W/mK}$  bis auf 600m Tiefe bei 31 Tagen Dauerbetrieb (Sprungantwort). Wärmeleitfähigkeit der Erde  $\lambda_{Earth} = 2.6 \text{ W/mK}$ , Jahresdurchschnittstemperatur der Oberfläche 11°C, Temperaturgradient 3.5°C/100m, Bohrdurchmesser 17.2cm, Exzentrizität = 0.5.

### 5.2.3 Isolierte Sondenrohre

Rohner und Bassetti schlagen vor, bei Doppel-U-Sonden im oberen Bereich die Rücklaufrohre zu isolieren (cf. Abb. 5.17). Ihr Vorschlag bezieht sich auf Sonden mit 127 m Bohrtiefe [Rohner, Bassetti, 2004]. Der Vorschlag ist sicher auch für tiefe Erdwärmesonden prüfenswert.

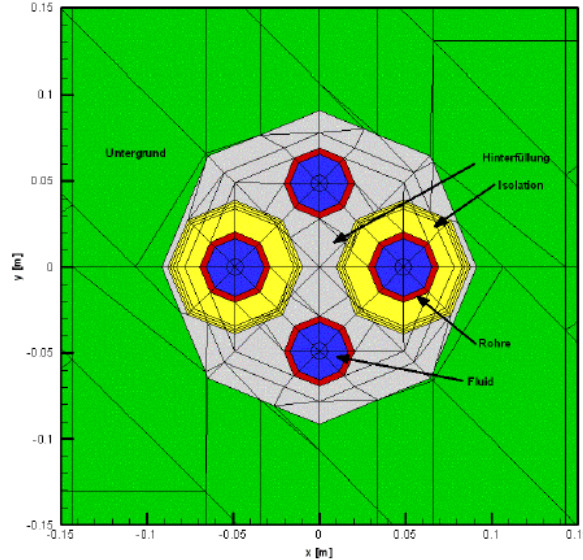


Abb. 5.17 Vorschlag für eine Isolation der 2 Rücklauf-Sondenrohre im oberen Teil der Erdwärmesonde nach Rohner, Bassetti [2004].

Im weiteren Verlauf der Arbeit soll nun untersucht werden, wie sich die Quellentemperatur durch diese Massnahme bei tiefen Erdwärmesonden erhöhen lässt. Dazu sind die Rechenmodelle wie folgt anzupassen:

Die Wärmedämmung der Sondenrohre erhöht den thermischen Widerstand  $R_s$  der Sondenrohr-Wand in Gl. 3.31. Dieser berechnet sich mit der neuen Wärmeleitfähigkeit der Wärmedämmung  $\lambda_{isol}$  als

$$R_s = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \lambda_s} \cdot \ln\left(\frac{r_s}{r_o}\right) + \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \lambda_{isol}} \cdot \ln\left(\frac{r_s}{r_o}\right) \quad \text{Gl. 5.1}$$

Analog ist der dimensionslose thermische Widerstand  $\beta$  vom Sondenrohr bis zum Fluid in Gl. 3.33 anzupassen auf

$$\beta = 2 \cdot \pi \cdot \lambda_{Fill} \cdot \left[ R_\alpha + \frac{1}{2} \cdot R_w + \frac{1}{2} \cdot R_{isol} \right] = \lambda_{Fill} \cdot \left[ \frac{1}{r_o \cdot \alpha} + \frac{1}{2 \cdot \lambda_s} \cdot \ln\left(\frac{r_s}{r_o}\right) + \frac{1}{2 \cdot \lambda_{isol}} \cdot \ln\left(\frac{r_s}{r_o}\right) \right] \quad \text{Gl. 5.2}$$

In erster Näherung können damit Gl. 3.30 und Gl. 3.32 weiterverwendet werden, was streng genommen nur gilt, wenn sich die Sondenrohrdurchmesser nicht ändern. Da dies in der Regel aber der Fall ist, soll eine angepasste Wärmeleitfähigkeit  $\lambda_{isol}$  verwendet werden, die sich aus der effektiven Wärmeleitfähigkeit des Isolierten Rohres  $\lambda_{isol\_eff}$  und dem effektiven, äusseren Rohrradius  $r_{isol}$  wie folgt berechnet:

$$\lambda_{isol} = \lambda_{isol\_eff} \cdot \frac{\ln\left(\frac{r_s}{r_o}\right)}{\ln\left(\frac{r_{isol}}{r_o}\right)} \quad \text{Gl. 5.3}$$

### 5.2.4 Instationäres Verhalten (Anfahrverhalten tiefer Erdwärmesonden)

Beim Anfahren einer inhomogenen, tiefen Erdwärmesonde, die in den ersten 400m mit einer schlecht wärmeleitenden Hinterfüllung ausgeführt wird, zeigt sich prinzipiell das gleiche Verhalten wie bei untiefen Erdwärmesonden: Der Kolbeneffekt bewirkt zunächst ein schnelles Ansteigen und anschliessend durch das Entstehen des Temperaturtrichters in den unteren Erdschichten wiederum ein stetiges Abnehmen der Quelltemperatur.

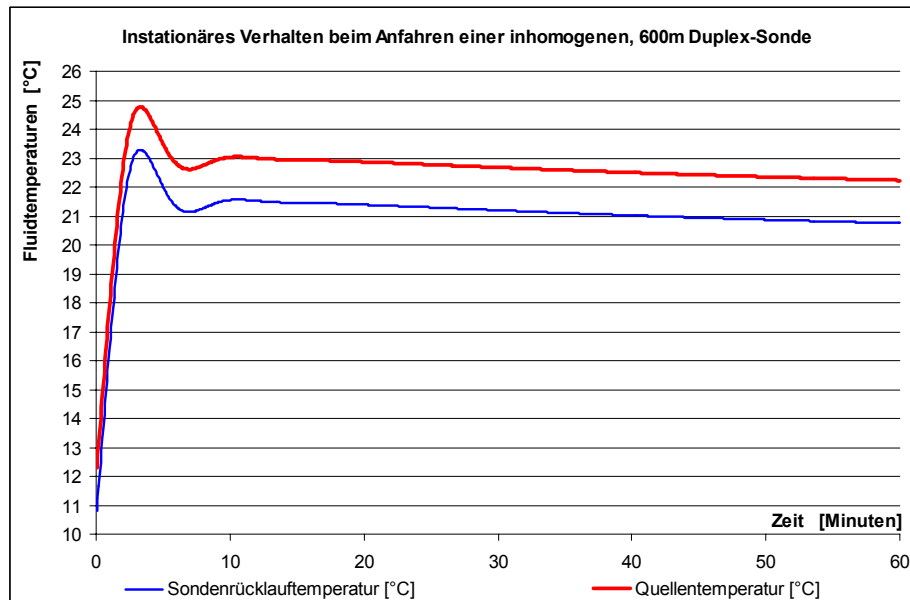


Abb. 5.18 Quellen- und Rücklauftemperatur (Fluidtemperaturen) einer 600m tiefen 50 mm Doppel-U-Sonde mit einer 6 3/4"-Bohrung und einer Exzentrizität von 0.5 beim erstmaligen Anfahren. Sondendurchsatz 0.8kg/s (Wasser) bei einer Entzugsleistung von 5 kW. Wärmeleitfähigkeit der Erde  $\lambda_{Earth} = 2.6 \text{ W/mK}$ , der Hinterfüllung oben (erste 420 m Bohrtiefe)  $\lambda_{Fill} = 0.16 \text{ W/mK}$  und 2.0 W/mK unten. Jahresdurchschnittstemperatur der Oberfläche 11°C, Temperaturgradient 3.5°C/100m.

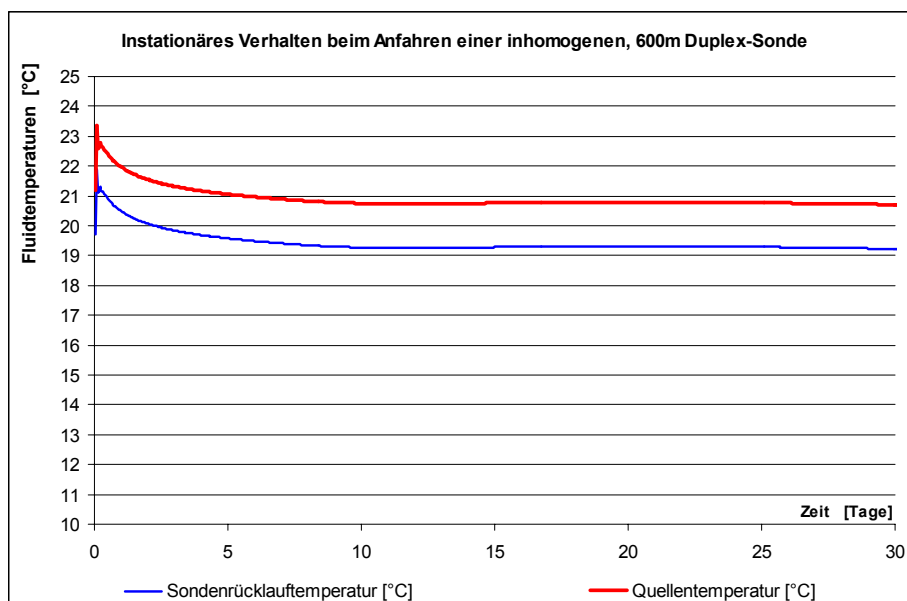


Abb. 5.19 Quellen- und Rücklauftemperatur (Fluidtemperaturen) einer 600m tiefen 50 mm Doppel-U-Sonde mit einer 6 3/4"-Bohrung und einer Exzentrizität von 0.5 beim erstmaligen Anfahren. Sondendurchsatz 0.8kg/s (Wasser) bei einer Entzugsleistung von 5 kW. Wärmeleitfähigkeit der Erde  $\lambda_{Earth} = 2.6 \text{ W/mK}$ , der Hinterfüllung oben (erste 420 m Bohrtiefe)  $\lambda_{Fill} = 0.16 \text{ W/mK}$  und 2.0 W/mK unten. Jahresdurchschnittstemperatur der Oberfläche 11°C, Temperaturgradient 3.5°C/100m.

Ähnlich sieht das Bild bei homogenen, tiefen Erdwärmesonden mit einer durchgehenden Hinterfüllung mit Wärmeleitfähigkeit 0.81 W/mK aus. Etwas weniger ausgeprägt, aber immer noch gut sichtbar der Kolbeneffekt, der zu einem sehr schnellen Anstieg der Quelltemperatur führt.

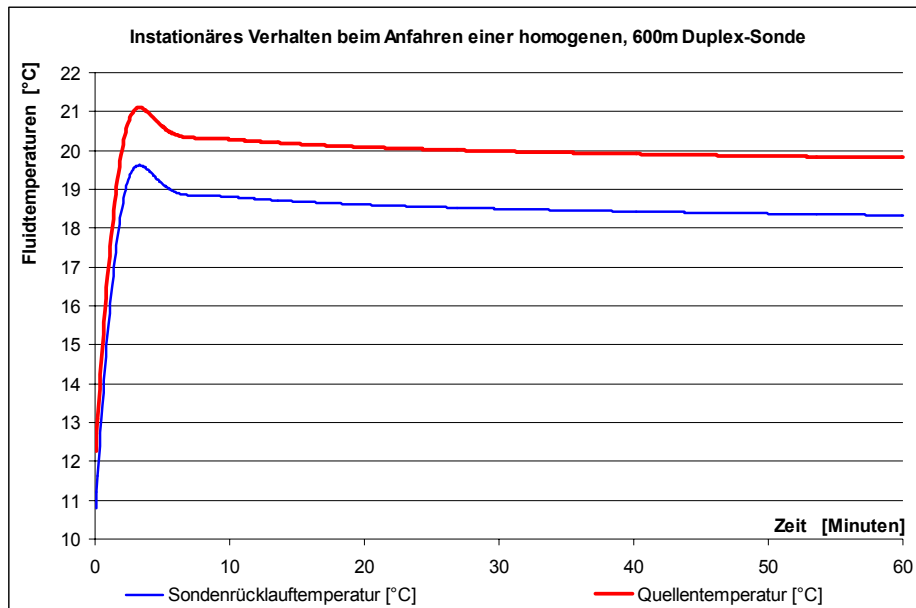


Abb. 5.20 Quellen- und Rücklauftemperatur (Fluidtemperaturen) einer 600m tiefen 50 mm Doppel-U-Sonde mit einer 6 3/4"-Bohrung und einer Exzentrizität von 0.5 beim erstmaligen Anfahren. Sondendurchsatz 0.8kg/s (Wasser) bei einer Entzugsleistung von 5 kW. Wärmeleitfähigkeit der Erde  $\lambda_{Earth} = 2.6$  W/mK und der Hinterfüllung von  $\lambda_{Fill} = 0.81$  W/mK. Jahresdurchschnittstemperatur der Oberfläche 11°C, Temperaturgradient 3.5°C/100m.

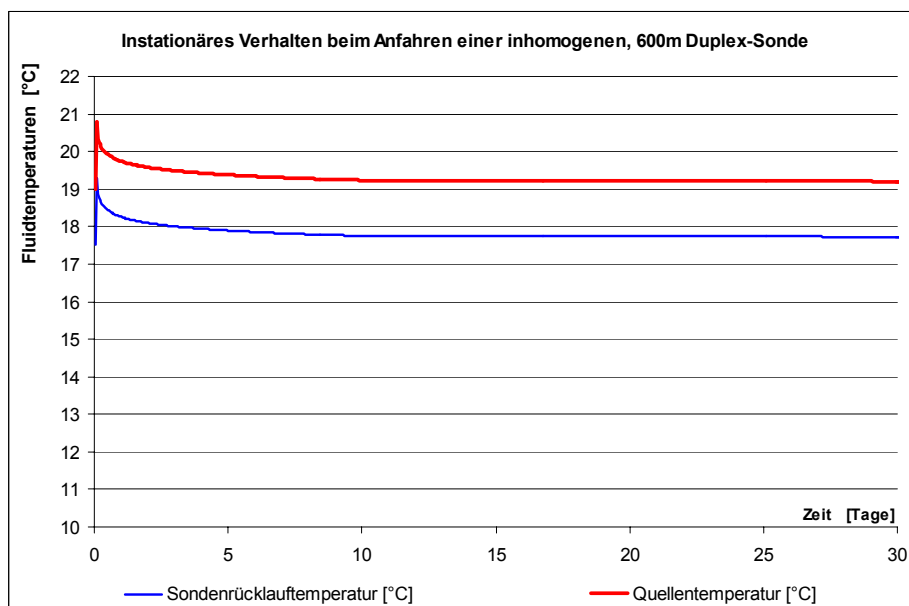


Abb. 5.21 Quellen- und Rücklauftemperatur (Fluidtemperaturen) einer 600m tiefen 50 mm Doppel-U-Sonde mit einer 6 3/4"-Bohrung und einer Exzentrizität von 0.5 beim erstmaligen Anfahren. Sondendurchsatz 0.8kg/s (Wasser) bei einer Entzugsleistung von 5 kW. Wärmeleitfähigkeit der Erde  $\lambda_{Earth} = 2.6$  W/mK und der Hinterfüllung von  $\lambda_{Fill} = 0.81$  W/mK. Jahresdurchschnittstemperatur der Oberfläche 11°C, Temperaturgradient 3.5°C/100m.

Die Berechnung zeigt deutlich, dass die Sondenpumpe nur bei einem effektiven Wärmebedarf in Betrieb sein sollte und sonst abgestellt werden kann.

### 5.3 Erreichbare Temperaturen bei Koaxialsonden

Abb. 5.22 und Abb. 5.23 wurden mit dem Programm-Modul EWS berechnet und zeigen, dass bei Koaxialsonden von über 500m Tiefe prinzipiell an eine Direktbeheizung eines Gebäudes mit Erdwärmesonden gedacht werden kann, da die Rücklauftemperaturen dann über 20°C liegen. Generell zeigt sich auch, dass es besser ist, im Innenrohr mit einer kleineren Fließgeschwindigkeit zu fahren als im Aussenrohr, wenngleich die Abhängigkeit nur gering ist.

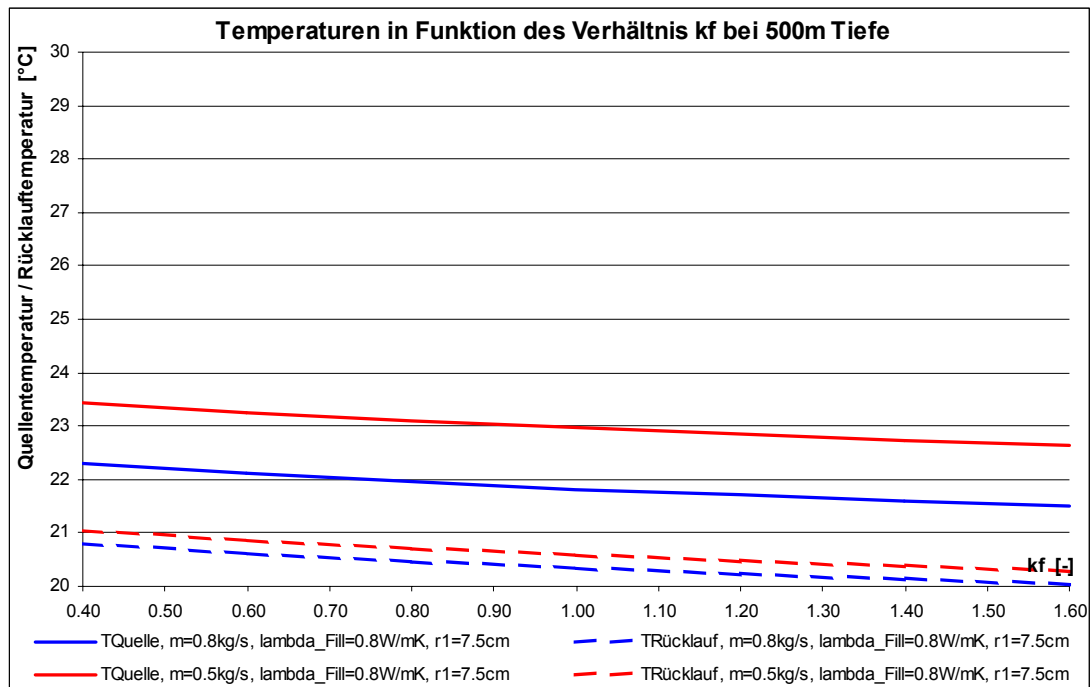


Abb. 5.22 Quellentemperaturen und Rücklauftemperaturen in Funktion des Fließgeschwindigkeitsverhältnis  $k_f$  für homogene Koaxialsonden von 500m Tiefe

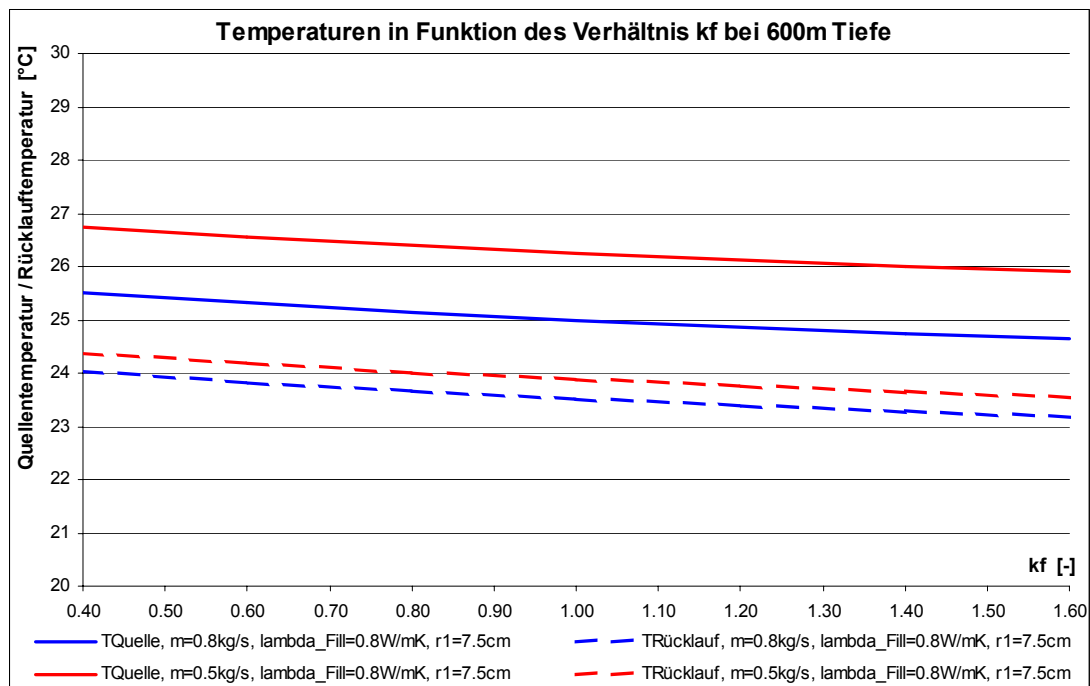


Abb. 5.23 Quellentemperaturen und Rücklauftemperaturen in Funktion des Fließgeschwindigkeitsverhältnis  $k_f$  für homogene Koaxialsonden von 600m Tiefe

Abb. 5.24 zeigt die Temperaturverteilung im Sonden – Nahbereich der Berechnung mit dem Programm-Modul EWS aus Abb. 5.23. für einen Sondendurchsatz von 0.8 kg/s. Dargestellt ist das Erdreich in einem Radius von 2m um die 600 m tiefe Koaxialsonde mit  $k_f = 1$  am Ende einer 31-tägigen Dauerentzugsperiode von 5 kW. Das Erdreich wurde in 10 Schichten à 60m mit einer Wärmeleitfähigkeit von  $\lambda_{\text{Earth}} = 2.6 \text{ W/mK}$  aufgeteilt.

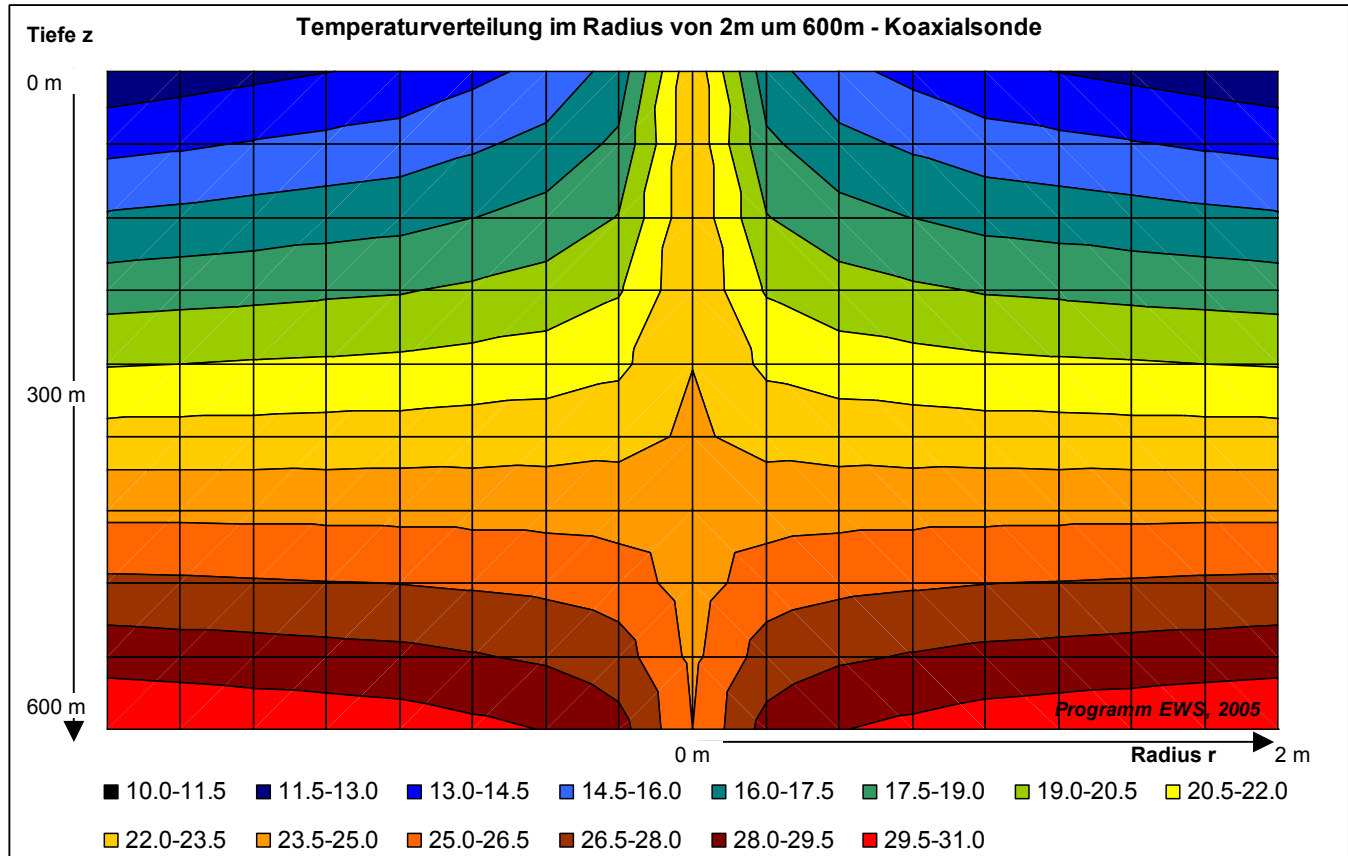


Abb. 5.24 Temperaturverteilung im Erdreich mit  $\lambda_{\text{Erde}} = 2.6 \text{ W/mK}$  um eine 600m tiefe Koaxialsonde mit Bohrradius 15 cm, äusserem Sondenrohr von 11cm und  $k_f = 1$ . Sondendurchsatz = 0.8 kg/s, Wärmeentzug 5kW nach 31 Tagen Dauerentzug. Oberflächentemperatur  $T_{\text{mo}} = 11^\circ\text{C}$  mit einem Temperaturgradienten  $\Delta T_{\text{Grad}} = 0.035 \text{ K/m}$ . Die Berechnung wurde durchgeführt mit dem Programm EWS.

Abb. 5.24 zeigt deutlich, dass der Wärmeentzug aus dem Erdreich primär im untersten Drittel der Sonde stattfindet und im obersten Drittel ist ein Wärmeabfluss von der Sonde ins umgebende Erdreich sichtbar. Dadurch erwärmt sich die Erde oben um die Sonde und verringert so die Wärmeverluste in der oberen Sondenhälfte auch ohne eine zusätzliche Isolation der Sonde. Dies ist auch der Grund, warum bei tiefen Erdwärmesonden ein Dauerentzug von geringerer Leistung einem intermittierenden Betrieb von höherer Leistung vorzuziehen ist.

## 6 Machbarkeit und Bohrschema

### 6.1 Koaxialsonden

Aus Abb. 5.13 wird ersichtlich, dass mit Koaxialsonden mit 600m Bohrtiefe prinzipiell genügend hohe Quellentemperaturen für eine Direktheizung erreichbar sind. Dies setzt aber voraus, dass die Erdwärmesonde zumindest im unteren Teil gut ans Erdreich angebunden sein muss.

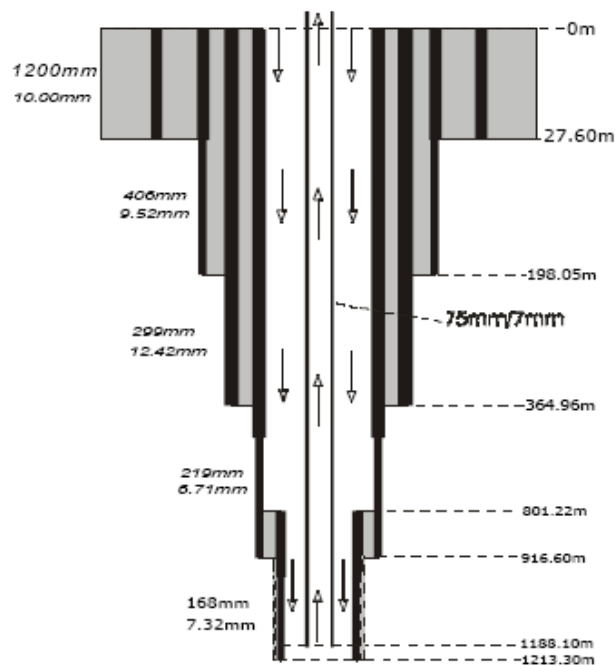


Abb. 6.1 Bohrschema der geschlossenen Koaxialsonde der Bohrung Weissbad (Kohl, Salton, Rybach, 2000)

Und hier liegt die Grundproblematik dieser Technik: Tiefe Koaxialsonden sind heute nur herstellbar mit Metall-Verrohrungen (cf. Bohrschema Abb. 6.1), bei denen das Problem der Hinterfüllung zur Zeit nur schwer zu lösen ist. Das Fehlen dieser Hinterfüllung führt zu grossen, thermischen Kontaktwiderständen, wodurch nur relativ bescheidene Quellentemperaturen realisierbar sind (cf. Messung Erdwärmesonde Weissbad in Abb. 6.2). Vergleichsrechnungen von Maraini (2000) haben gezeigt, dass ohne diese thermischen Kontaktwiderstände  $7^{\circ} - 10^{\circ}\text{C}$  höhere Quellentemperaturen erreichbar wären. (Zu beachten ist dabei die höhere, spezifische Entzugsleistung von durchschnittlich  $34 \text{ W/m}$  für die Sonde Weissbad im Vergleich zur Berechnung in Abb. 5.13 mit  $8.3 \text{ W/m}$ ).

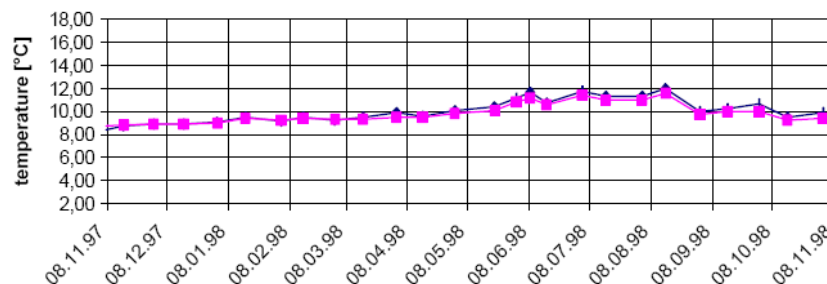


Abb. 6.2 Gemessene Quellentemperaturen der geschlossenen Koaxialsonde Weissbad, Bohrtiefe 1213m (Kohl, Salton, Rybach, 2000)

Um eine bessere Ankopplung der Erde an die Sonde zu erreichen sind somit ein oder mehrere Injektionsrohre einzubringen oder es wird durch die Sonde über ein Zementationsschuh eine Hinterfüllung eingebracht. Dies ist aber nur mit den entsprechenden, bedeutenden Kosten realisierbar.



## 6.2 Doppel-U-Sonden

Mit 600 m tiefen, homogenen Doppel-U-Sonden sind im optimalen Fall Quellentemperaturen (Temperatur am Sondenaustritt) von ca. 19°C erreichbar (Abb. 5.9). Bei einer inhomogenen Hinterfüllung (oben schlecht, unten gut wärmeleitend) kann dieser Wert um maximal 2 °C gehoben werden (Abb. 5.13). Diese Temperatur reicht in der Regel nicht aus für eine direkte Beheizung eines Gebäudes.

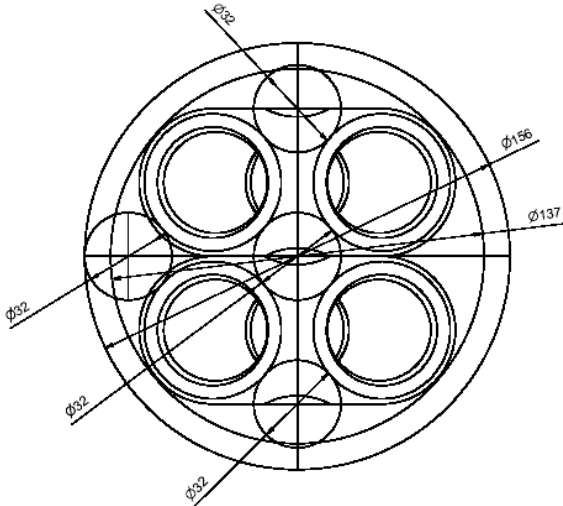


Abb. 6.3 Querschnitt durch 50 mm Duplex-Sonde  
Machbarkeitsstudie Haka Gerodur AG

Die prinzipielle Machbarkeit von 600 m tiefen Doppel-U-Sonden wurde von der Firma Haka Gerodur AG untersucht. Für so tiefe Sonden sind Sondenrohre mit 50mm Nenndurchmesser erforderlich, damit der Druckverlust in der Sonde nicht zu hoch wird. Die Hinterfüllung kann dabei in 3 Hinterfüllungsrohren eingebracht werden. Damit ist eine unterschiedliche Hinterfüllung über die Bohrtiefe möglich (gut Wärmeleitend unten, schlecht leitend oben). Die Sonde müsste voraussichtlich in mehreren Teilen auf die Bohrstelle gebracht werden.

### 6.2.1 Bohr- und Verrohrungsschema für 600m tiefe Duplex-Sonde 50 mm

Im optimalen Fall kann mit einem 6 3/4" PDC-Meißel in der Molasse bis auf 1'200 Meter Tiefe gebohrt werden. Dies setzt aber voraus, dass über die Bohrtiefe kein Konglomerat vorhanden ist, das Bohrloch standfest ist und nur unbedeutende Wasserdurchbrüche vorhanden sind. Ist dies nicht der Fall, so muss auf das Rotary-Bohrverfahren mit XC-Polymerpülung gewechselt werden. In der oberen Hälfte wäre eine temporäre 8 5/8" – Verrohrung nötig, was eine 9 5/8" – Bohrung erforderlich macht. Für das sichere Einbringen der Sonde ist im unteren Teil eine 7 3/4" Bohrung erforderlich. Um die Gefahr eines einstürzenden Bohrlochs zu minimieren ist eine 24-Stunden-Bohrbewilligung einzuholen.

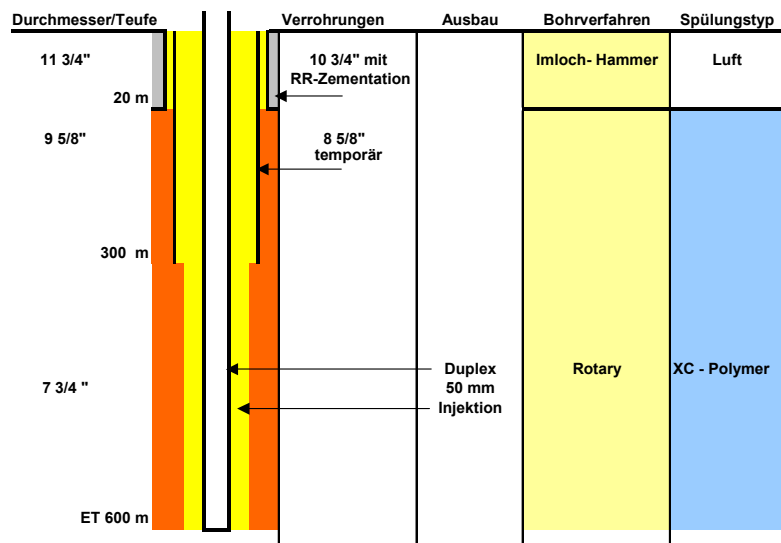


Abb. 6.4 Vorschlag Hr. Berli (Foralith AG) für Bohr- und Verrohrungsschema für eine 600m tiefe, 50mm Doppel-U-Sonde bei unbekannten Bohrverhältnissen.

## 7 Wirtschaftlichkeit

Würde man heute zu einem Bohrunternehmen gehen und eine Offerte für die Erstellung einer Erdwärmesonde auf eine Tiefe von 600m gemäss dem Bohrschema in Abb. 6.4 (inklusive Lieferung und Einbringung einer 50mm Doppel-U-Sonde) offerieren lassen, so müsste man mit Kosten von rund 670'000 Fr. rechnen. Eine Wirtschaftlichkeitsbetrachtung dazu erübrigt sich.

Im folgenden soll deshalb nur der Idealfall eines Bohruntergrundes im Molassebecken ohne Konglomeratvorkommen, ohne bedeutende Wasserdurchbrüche und mit standfestem Bohrloch wirtschaftlich untersucht und mit einer konventionellen Wärmepumpenlösung mit Erdwärmesonde verglichen werden.

### 7.1 Randbedingungen

#### 7.1.1 Gebäude

Für unseren Vergleich soll ein Einfamilienhaus mit einem Heizleistungsbedarf von 5 kW und einem Heizwärmebedarf von 10'000 kWh untersucht werden. Der Warmwasserbedarf wird im nachfolgenden Vergleich nicht betrachtet. Das Gebäude verfüge über Thermoaktives Bauteilsystem (TABS), womit eine Beheizung mit Vorlauftemperaturen von 24°C ermöglicht wird.

#### 7.1.2 Wirtschaftliche Randbedingungen

Der wirtschaftliche Vergleich soll mit der Annuitätenmethode erfolgen. Dabei soll eine Realwert-Betrachtung mit einem Realzins von 2% durchgeführt werden. Die Lebensdauer der Sonde wird mit 40 Jahren, der Umwälzpumpe mit 20 Jahren und der Wärmepumpe mit 15 Jahren eingesetzt. Als Strompreis soll 15 Rp./kWh eingesetzt werden.

### 7.2 Vergleichsvariante mit Wärmepumpe

Als Vergleichsvariante soll eine konventionelle Wärmepumpe mit einem COP von 4 eingesetzt werden. Als Wärmequelle diene eine 125 m tiefe Erdwärmesonde (wassergefüllt). Die Umwälzpumpe habe eine Strom-Aufnahmeleistung von 120 W. Es wird von jährlichen Wartungs- und Unterhaltskosten von 200 Fr./a ausgegangen.

	Investition [Fr]	Lebensdauer [a]	Annuität
Erdwärmesonde 125m	Fr. 11'000	40	Fr. 402
Bohr-Nebenkosten	Fr. 2'000	40	Fr. 73
Sondenzuleitung	Fr. 4'000	40	Fr. 146
Umwälzpumpe	Fr. 1'000	20	Fr. 61
Wärmepumpe	Fr. 16'000	15	Fr. 1'245
<i>Investitionskosten total:</i>			<i>Fr. 1'927</i>
<b>Betriebskosten:</b>			
Stromkosten bei 15 Rp./kWh			Fr. 411
Wartung / Unterhalt:			Fr. 200
<b>Jahreskosten Investition &amp; Betrieb:</b>			<b>Fr. 2'338</b>

### 7.3 Direktheizsonde ohne Wärmepumpe

Um die geforderten 24°C Vorlauftemperatur erreichen zu können, muss mit einer 50mm Doppel-U-Sonde gemäss Abb. 5.15 eine Bohrtiefe von 750m erreicht werden. Ideale Bedingungen vorausgesetzt, kann das Bohrloch mit einem 6 3/4" PDC-Meissel auf 750m abgeteuft werden können (cf. Kapitel 6.2.1). Die Umwälzpumpe habe eine Stromaufnahmeleistung von 200 W. Im Gegensatz zu einer Lösung mit einer Wärmepumpe sind bei der Direktheizsonde über die Lebensdauer der Anlage mit keinen Wartungs- und Unterhaltskosten zu rechnen.

	Investition [Fr]	Lebensdauer [a]	Annuität
Sondenrohre 750m	Fr. 26'000	40	Fr. 950
Bohrung	Fr. 39'000	40	Fr. 1'426
Bohr-Nebenkosten	Fr. 6'000	40	Fr. 219
Hinterfüllung	Fr. 9'000	40	Fr. 329
Sondenzuleitung	Fr. 4'000	40	Fr. 146
Umwälzpumpe / Plattentauscher	Fr. 3'000	20	Fr. 183
<i>Investitionskosten total:</i>			<i>Fr. 3'253</i>
<b>Betriebskosten:</b>			
Stromkosten bei 15 Rp./kWh			Fr. 60
Wartung / Unterhalt:			-
<b>Jahreskosten Investition &amp; Betrieb:</b>			<b>Fr. 3'313</b>

### 7.4 Vergleich und Schlussfolgerungen

Der Vergleich der 2 Varianten zeigt, dass mit der Direktheizsonde mit jährlich ca. Fr. 1'000.- höheren Kosten zu rechnen ist. Es ist durchaus denkbar, dass mit der Weiterentwicklung der Bohrtechnik in Zukunft die Investitionskosten so gesenkt werden können, dass diese auf das Kostenniveau der Grundvariante gesenkt werden können.

Zu beachten sind dabei allerdings die folgenden Punkte:

1. Mit geschlossenen Direktheizsonden ist keine Warmwasserproduktion möglich.
2. Der Bohrgrund hat eine entscheidende Bedeutung für die Machbarkeit. In der Projektierungsphase ist dieser in der Regel nicht genügend gut bekannt. Es kann in der Regel nicht davon ausgegangen werden, dass über die ganze Bohrtiefe kein Konglomerat vorhanden ist, dass das Bohrloch genügend Standfestigkeit aufweist und dass keine Wassereinbrüche stattfinden werden.
3. Die Machbarkeit von 50mm Doppel-U-Sonden von 600 m Tiefe wurde bejaht. Bei den benötigten 750 m Tiefe wäre die Machbarkeit für die Sonde noch zu untersuchen.
4. Die relativ geringe, mögliche Sondenbelastung (Entzugsleistung pro Bohrmeter) hebt den Kostenvorteil wieder auf, dass keine Wärmepumpe für die Heizung installiert werden muss. Die kleine Sondenbelastung ergibt sich physikalisch daraus, dass im oberen Teil der Sonde die unbeeinflusste Erdreichtemperatur tiefer ist als die benötigte Quelltemperatur des Sondenfluids. Ein Wärmeentzug ist deshalb nur im untersten Drittel der Sonde möglich.

## 8 Symbolverzeichnis

### 8.1 Lateinische Symbole

$a$	Temperaturleitfähigkeit	$[m^2/s]$
$b$	Exzentrizität bei Doppel – U – Sonden	$[-]$
$B$	Sondenabstand verschiedener Erdwärmesonden	$[m]$
$Bu$	Rohrabstand des hinaufströmenden zum hinunterströmenden Fluid (shank spacing)	$[m]$
$cp_{Sole}$	spez. Wärmekapazität des Sondenfluids	$[J/(kgK)]$
$D_i$	Innendurchmesser der Sondenrohre	$[m]$
$Dim_{Axi}$	Anzahl Rechenknoten in axialer Richtung	$[-]$
$Dim_{Rad}$	Anzahl Rechenknoten in radialer Richtung	$[-]$
$Es$	dimensionslose Zeit von Eskilson	$[-]$
$f$	Gitterfaktor für das Rechengitter in radialer Richtung	$[-]$
$g$	dimensionslose Temperatursprungantwort der Erde nach Eskilson	$[-]$
$H$	Erdwärmesondenlänge, Bohrtiefe	$[m]$
$\dot{m}$	Massenstrom, Sondendurchsatz (pro Erdwärmesonde)	$[kg/s]$
$m$	Anzahl Rechenknoten in radialer Richtung (=DimRad)	$[-]$
$Nu$	Nusseltzahl	$[-]$
$k_f$	Verhältnis der Fließgeschwindigkeit des hinauf- zum hinunterströmenden Fluid	$[-]$
$Pr$	Prandtlzahl	$[-]$
$\Delta p$	Druckabfall	$[Pa]$
$\dot{q}$	Spezifische Wärmeentzugsleistung der Erdwärmesonde pro Länge	$[W/m]$
$\dot{q}_{geo}$	Geothermischer Wärmefluss aus dem Erdinnern	$[W/m^2]$
$\Delta q_i$	Wärmeverlust vom hinaufströmenden ans hinunterströmende Fluid	$[W/m]$
$\dot{Q}$	Leistung	$[W]$
$Re$	Reynoldszahl	$[-]$
$r_o$	Innenradius des Sondenrohres	$[m]$
$r_s$	Aussenradius des Sondenrohres	$[m]$
$r_i$	Innenradius des inneren Koaxialrohres	$[m]$
$r_{isol}$	Aussenradius des isolierten Sondenrohres bei Doppel-U-Sonden	$[m]$
$r_a$	Aussenradius des inneren Koaxialrohres	$[m]$
$r_1$	Bohrradius	$[m]$
$r_b$	radialer Abstand von der Sondenachse (Variable)	$[m]$
$R_\alpha$	Wärmeübergangswiderstand (vom Fluid zum Sondenrohr)	$[Km/W]$
$R_a$	interner Sondenwiderstand (von hinauf- zu hinabströmendem Fluid)	$[Km/W]$
$R_b$	thermischer Bohrlochwiderstand (von Fluid - bis Bohrradius) in Tiefe $z$	$[Km/W]$
$R_b^*$	über die Bohrtiefe gemittelter, thermischer Bohrlochwiderstand	$[Km/W]$
$R_c$	thermischer Sondenwiderstand (von Sondenrohr- bis Bohrradius)	$[Km/W]$
$R_i$	thermischer Ersatzwiderstand zwischen $T_{up}$ und $T_{down}$	$[Km/W]$

$\Delta T_{Grad}$	Temperaturgradient im unbeeinflussten Erdreich	[K/m]
$T_b$	Bohrlochtemperatur in Tiefe z (auf dem Radius $r_1$ )	[°C]
$\overline{T}_b$	über die Bohrtiefe gemittelte Bohrlochtemperatur (auf dem Radius $r_1$ )	[°C]
$T_f$	mittlere Fluidtemperatur in der Tiefe z	[°C]
$\overline{T}_f$	mittlere Fluidtemperatur, $\frac{1}{2} (T_{Quelle} + T_{Rücklauf})$	[°C]
$T_{down}$	Temperatur des hinunterströmenden Fluids in der Tiefe z	[°C]
$\overline{T}_{Luft}$	langjährige Mitteltemperatur der Aussenluft	[°C]
$T_m$	ungestörte Erdreichmitteltemperatur (in der Tiefe z)	[°C]
$T_{mo}$	Jahresmitteltemperatur der Erdoberfläche	[°C]
$T_{Quelle}$	Quellentemperatur (Temperatur des ausströmenden Sondenfluids)	[°C]
$T_{Rücklauf}$	Rücklauftemperatur (Temperatur des einströmenden Sondenfluids)	[°C]
$T_{up}$	Temperatur des hinaufströmenden Fluids in der Tiefe z	[°C]
$t_s$	Sondenzeitkonstante	[s]
$v$	Strömungsgeschwindigkeit	[m/s]
$w$	Sandstärke des Innenrohrs bei Koaxialsonden ( $r_a - r_i$ )	[m]
$z$	Tiefe im Erdreich, von der Erdoberfläche an gerechnet	[m]
$Z$	Höhe des Standorts über dem Meeresspiegel	[m]

## 8.2 Griechische Symbole

$\alpha$	Wärmeübergangskoeffizient des Sondenfluids an die Sonde	[W/(m <sup>3</sup> K)]
$\beta$	dimensionsloser thermischer Widerstand Sondenrohr bis Fluid	[-]
$\xi$	dimensionsloser Druckverlustkoeffizient (Rohrreibungszahl, oft auch $\lambda$ )	[-]
$\gamma$	Eulerkonstante, 0.5772..	[-]
$\nu$	kinematische Viskosität der Sondenfüllung	[m <sup>2</sup> /s]
$\lambda_{Earth}$	Wärmeleitfähigkeit der Erde	[W/(mK)]
$\lambda_{Fill}$	Wärmeleitfähigkeit der Hinterfüllung	[W/(mK)]
$\lambda_{isol}$	Wärmeleitfähigkeit des isolierten Sondenrohrs	[W/(mK)]
$\lambda_s$	Wärmeleitfähigkeit der Sondenrohre	[W/(mK)]
$\lambda_w$	Wärmeleitfähigkeit des Innenrohrs bei Koaxialsonden	[W/(mK)]
$\sigma$	Konduktivitätsparameter der Hinterfüllung	[-]

## 9 Literaturverzeichnis

- Carslaw, H.S.; Jaeger, J.C. (1959):** Conduction of heat in solids. 2<sup>nd</sup> ed., Oxford Univers. Press, London.
- Claesson, J.; Eskilson, P. (1987):** Conductive Heat Extraction by a Deep Borehole. Analytical Studies. Dep. of Mathematical Physics, University of Lund.
- Claesson, J.; Eskilson, P. (1988):** Simulation Model for Thermally Interacting Heat Extraction Boreholes. Numerical Heat Transfer, vol. 13, pp. 149-165.
- Eskilson, P. (1987):** Thermal Analysis of Heat Extraction Boreholes. Department of Mathematical Physics, Lund Institute of Technology, Lund, Sweden. ISBN 91-7900-298-6
- Eugster, W. (1998):** Langzeitverhalten der Erdwärmesonden-Anlage in Elgg/ZH. PSEL-Projekt Nr. 102. Projekt- und Studienfonds der Elektrizitätswirtschaft.
- Hellström, G. (1991):** Ground Heat Storage. Thermal Analyses of Duct Storage Systems. Theory. Dep. of Mathematical Physics, University of Lund, Sweden. ISBN 91-628-0290-9
- Hopkirk, R.; Rybach, L.; Stalder, T. (1994):** Tiefe Erdwärmesonden. BFE, Bern.
- Huber, A.; Schuler, O. (1997):** Berechnungsmodul für Erdwärmesonden. Forschungsprogramm Umgebungs- und Abwärme, Wärmekraftkopplung. Bundesamt für Energie, Bern.
- Huber, A.; Pahud, D. (1999a):** Untiefe Geothermie: Woher kommt die Energie? Forschungsprogramm Geothermie. Bundesamt für Energie (BFE), Bern.
- Huber, A.; Pahud, D. (1999b):** Erweiterung des Programms EWS für Erdwärmesondenfelder. Schlussbericht. Bundesamt für Energie (BFE), Bern.
- Huber, A. (1999):** Hydraulische Auslegung von Erdwärmesondenkreisläufen. Schlussbericht. Bundesamt für Energie (BFE), Bern.
- Kohl, T.; Salton, M.; Rybach, L. (2000):** Data analysis of the deep borehole heat exchanger plant Weissbad. Proceedings World Geothermal Congress 2000, Kyushu - Tohoku, Japan
- Leu, W.; Keller, G.; Mégel, Th.; Schärli, U.; Rybach, L. (1999):** Programm SwEWS-99. Berechnungsprogramm für geothermische Eigenschaften der Schweizer Molasse (0-500m). Schlussbericht. Bundesamt für Energie, Bern.
- Leu, W.; Keller, G.; Matter, A.; Schärli, U.; Rybach, L. (1999):** Geothermische Eigenschaften Schweizer Molassebecken (Tiefenbereich 0-500m). Bundesamt für Energie, Bern.
- Maraini, S. (2000):** Vergleich von Software zur Dimensionierung von Erdwärmesonden-Anlagen. Diplomarbeit am Institut für Geophysik der ETH Zürich.
- Merker, G. (1987):** Konvektive Wärmeübertragung. Springer-Verlag.
- Medici, F.; Rybach, L. (1995):** Geothermal Map of Switzerland 1995 (Heat Flow Density), Matériaux pour la Géologie de la Suisse, Géophysique Nr. 30. Schweizerische Geophysikalische Kommission.
- Rohner, E.; Bassetti, S. (2004):** Zwischenbericht Projekt Erfolgskontrolle und Planungsinstrumente für EWS-Feld Hotel Dolder Zürich. Forschungsprogramm Geothermie, BFE, Bern.
- Salton, M. (1999):** Untersuchungen zum Verhalten von Erdwärmesonden. Diplomarbeit am Institut für Geophysik der ETH Zürich.
- Signorelli, S. (2004):** Geoscientific Investigations for the Use of Shallow Low-Enthalpy Systems. Dissertation ETH Zürich, No. 15519.
- Werner, A.; Bigler, R.; Niederhauser, A. et. al. (1996):** Grundlagen für die Nutzung von Wärme aus Boden und Grundwasser im Kanton Bern. Thermoprogramm Erdwärmesonden, Burgdorf. Schlussbericht. Wasser- und Energiewirtschaftsamt des Kt. Bern (WEA).

## 10 Anhang

### 10.1 Eingabeparameter für die Berechnungen im Programm EWS

#### 10.1.1 Berechnungsbeispiel für 600m tiefe Koaxialsonden

Nachfolgend sind die Eingabeparameter für das Beispiel aus Kapitel 5.3 (Abb. 5.23 mit Sondenmassenstrom 0.8 kg/s und  $k_f = 1$ ) im angepassten Programm EWS dargestellt.

**Sonden-Geometrie:**

Durchmesser Sonde [m] (ausen) 0.1100  
Wandstärke Sonde [m] 0.0050  
Wärmeleitfähigkeit Sondenrohr [W/mK] 0.40

Typ: ☒ Koaxial ☐ Doppel-U

Anzahl Sonden 1  
Sondenabstand B [m] 10.0  
Sondenlänge H [m] 600.0  
Bohrdurchmesser [m] 0.150

**Bei Koaxial-Sonden:**

Innenrohr-Durchmesser [m] (ausen) 0.0746  
Wandstärke Innenrohr [m] 0.0040  
Wärmeleitfähigkeit Innenrohr [W/mK] 0.40

**Dimensionslose Temperaturungantworten (g-functions):**

Randbedingung mit g-functions? ☒ ja ☐ nein  
Sondenabstand der g-function [m] 10.0 B/H eff. 0.50  
g-function: Einzelsonde  
grafische Darstellung der g-function: Graf g-function

ln(t/hs) = -4 4.820  
ln(t/hs) = -2 5.690  
ln(t/hs) = 0 6.290  
ln(t/hs) = +2 6.570  
ln(t/hs) = +3 6.600

Abb. 10.1 Geometrische Sondenparameter und verwendete g-function

**Anzahl horizontale Schichten:** 10 **Externe Bodendaten:** SwEWS

**Stoffwerte der Erde:**

	$\lambda$ [W/mK]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$c_p$ [J/kgK]
Homogen:	2.50	2600	1000

**Stoffwerte der Hinterfüllung:**

	$\lambda$ [W/mK]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$c_p$ [J/kgK]
Homogen:	0.81	1180	3040

**Bohrlochwiderstände:**

Rohrabstand (Shank spacing) 0.093 [m]

	Ra [mK/W]	Rb [mK/W]	Rc [mK/W]
Homogen:	0.074	0.110	0.099

**Schicht 1 bis Schicht 10:**

Schicht	$\lambda$ [W/mK]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$c_p$ [J/kgK]	Ra [mK/W]	Rb [mK/W]	Rc [mK/W]
Schicht 1	2.60	2600	1000	0.074	0.110	0.099
Schicht 2	2.60	2600	1000	0.074	0.110	0.099
Schicht 3	2.60	2600	1000	0.074	0.110	0.099
Schicht 4	2.60	2600	1000	0.074	0.110	0.099
Schicht 5	2.60	2600	1000	0.074	0.110	0.099
Schicht 6	2.60	2600	1000	0.074	0.110	0.099
Schicht 7	2.60	2600	1000	0.074	0.110	0.099
Schicht 8	2.60	2600	1000	0.074	0.110	0.099
Schicht 9	2.60	2600	1000	0.074	0.110	0.099
Schicht 10	2.60	2600	1000	0.074	0.110	0.099

Program EWS, Lizenz für Huber Energietechnik AG © Huber Energietechnik, Zürich

Abb. 10.3 Stoffwerte des Bodens, der Hinterfüllung und Bohrlochwiderstände

**Eingabedaten EWS**

**Stoffwerte Fluid:** Wasser

Wärmeleitfähigkeit Fluid [W/mK] 0.49  
Dichte Fluid [kg/m<sup>3</sup>] 1000  
spezif. Wärmekapazität Fluid [J/kgK] 4220  
kinematische Viskosität Fluid [m<sup>2</sup>/s] 0.0000018

**Sondendurchsatz:**

Auslegungsmassenstrom [kg/s] 0.800

**Temperaturen im ungestörten Erdreich:**

Jahresmitteltemperatur Luft [°C] 9.0  
zusätzliche Bodenwärmung [°C] 2.0  
Temperaturgradient Erde [°C/m] 0.035

Abb. 10.2 Parameter des Sondenfluids und Temperaturen im ungestörten Erdreich

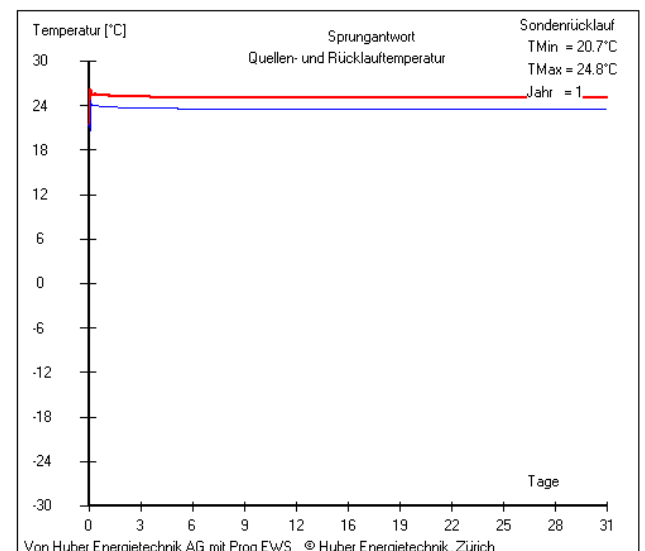


Abb. 10.4 Quelltemperatur und Sonden-Rücklauf-temperatur bei 31-tägigem Dauerentzug von 5 kW Leistung

### 10.1.2 Berechnungsbeispiel für 600m tiefe, inhomogene Doppel-U-Sonde

Nachfolgend sind die Eingabeparameter für das Beispiel aus Kapitel 5.2.1 (Abb. 5.13 mit Sondenmassenstrom 0.8 kg/s und Exzentrizität = 0.5) im angepassten Programm EWS dargestellt. Die Hinterfüllung hat oben eine Wärmeleitfähigkeit von  $\lambda_{\text{Fill}} = 0.4 \text{ W/mK}$  und unten von  $1.5 \text{ W/mK}$ .

**Sonden-Geometrie:**  
 50 mm doppel-U-Sonde  
 Typ: ☐ Koaxial ☒ Doppel-U  
 Anzahl Sonden: 1  
 Sondenabstand B [m]: 10.0  
 Sondenlänge H [m]: 600.0  
 Bohrdurchmesser [m]: 0.150  
 Durchmesser Sonde [m] (ausen): 0.0500  
 Wandstärke Sonde [m]: 0.0037  
 Wärmeleitfähigkeit Sondenrohr [W/mK]: 0.40  
**Bei Koaxial-Sonden:**  
 Innenrohr-Durchmesser [m] (ausen): 0.0250  
 Wandstärke Innenrohr [m]: 0.0025  
 Wärmeleitfähigkeit Innenrohr [W/mK]: 0.40  
**Dimensionslose Temperatursprungantworten ( g - functions ):**  
 Randbedingung mit g-functions ? ☒ ja ☐ nein  
 Sondenabstand der g-function [m]: 10.0 B/H eff. 0.02  
 g-function: Einzelsonde  
 grafische Darstellung der g-function: Graf g-function  
 $\ln(t/t_s) = -4$  4.820  
 $\ln(t/t_s) = -2$  5.690  
 $\ln(t/t_s) = 0$  6.290  
 $\ln(t/t_s) = +2$  6.570  
 $\ln(t/t_s) = +3$  6.600

Abb. 10.5 Geometrische Sondenparameter und verwendete g-function

**Anzahl horizontale Schichten:** 10 **Externe Bodendaten:** SwEWS  
**Stoffwerte der Erde:**  
 Homogen:  $\lambda$  [W/mK]: 2.60  $\rho$  [kg/m<sup>3</sup>]: 2600  $c_p$  [J/kgK]: 1000  
☐ Erdreich homogen ☒ Erdreich inhomogen  
**Stoffwerte der Hinterfüllung:**  
☐ Hinterfüllung homogen ☒ Hinterfüllung inhomogen  
**Bohrlochwiderstände:**  
 Rohrabstand ("Shank spacing") [m]: 0.075  
 $R_a$  [mK/W]: 0.204  $R_b$  [mK/W]: 0.093  $R_c$  [mK/W]: 0.089  
 (falls unbekannt leer lassen)  
☒ Berechnung nach Hellström ☐ Vorgabe der Widerstände  

Schicht	$\lambda$ [W/mK]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$c_p$ [J/kgK]	$\lambda$ [W/mK]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$c_p$ [J/kgK]	$R_a$ [mK/W]	$R_b$ [mK/W]	$R_c$ [mK/W]
Schicht 1	2.60	2600	1000	0.40	1180	3040	0.270	0.133	0.129
Schicht 2	2.60	2600	1000	0.40	1180	3040	0.270	0.133	0.129
Schicht 3	2.60	2600	1000	0.40	1180	3040	0.270	0.133	0.129
Schicht 4	2.60	2600	1000	0.40	1180	3040	0.270	0.133	0.129
Schicht 5	2.60	2600	1000	0.40	1180	3040	0.270	0.133	0.129
Schicht 6	2.60	2600	1000	1.50	1180	3040	0.138	0.053	0.049
Schicht 7	2.60	2600	1000	1.50	1180	3040	0.138	0.053	0.049
Schicht 8	2.60	2600	1000	1.50	1180	3040	0.138	0.053	0.049
Schicht 9	2.60	2600	1000	1.50	1180	3040	0.138	0.053	0.049
Schicht 10	2.60	2600	1000	1.50	1180	3040	0.138	0.053	0.049

  
 Program EWS, Lizenz für Huber Energietechnik AG © Huber Energietechnik, Zürich

Abb. 10.7 Stoffwerte des Bodens, der Hinterfüllung und Bohrlochwiderstände

**Eingabedaten EWS**  
 Datei Eingaben Import Ausgabe Fenster Info  
 Eingaben Berechnung Öffnen Speichern Resultate  
**Stoffwerte Fluid:** Wasser  
 Wärmeleitfähigkeit Fluid [W/mK]: 0.49  
 Dichte Fluid [kg/m<sup>3</sup>]: 1000  
 spezif. Wärmekapazität Fluid [J/kgK]: 4220  
 kinematische Viskosität Fluid [m<sup>2</sup>/s]: 0.0000018  
**Sondendurchsatz:**  
 Auslegungsmassenstrom [kg/s]: 0.800  
**Temperaturen im ungestörten Erdreich:**  
 Jahresmitteltemperatur Luft [°C]: 9.0  
 zusätzliche Bodenerwärmung [°C]: 2.0  
 Temperaturgradient Erde [°C/m]: 0.035

Abb. 10.6 Parameter des Sondenfluids und Temperaturen im ungestörten Erdreich

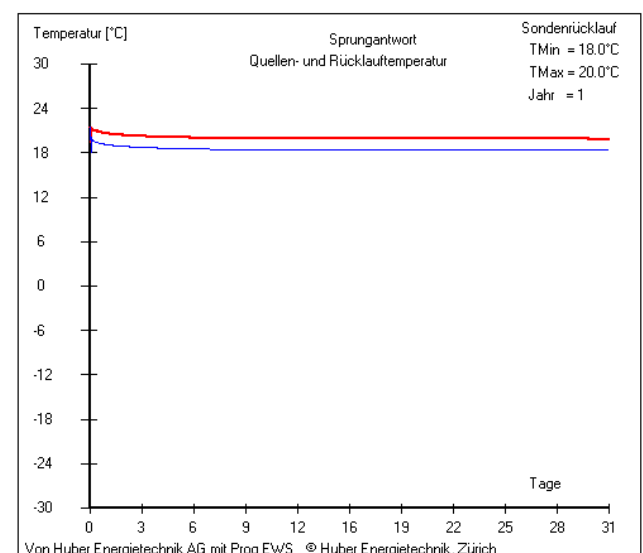


Abb. 10.8 Quelltemperatur und Sonden-Rücklauf-temperatur bei 31-tägigem Dauer-entzug von 5 kW Leistung



## 10.2 Quellcode für die Programm-Anpassungen im Modul EWS

### 10.2.1 Quellcode für den Wärmeübergang $\alpha$ Fluid - Sondenrohr

```
Function alpha1(NueSole,rhoSole,cpSole,lambdaSole,Massenstrom,Sondendurchmesser,
               Dicke_Sondenrohr,Innenrohrdurchmesser : real) : real;
(* Function alpha1: Waermeuebergang Sole-Hinterfuellung, wenn Pumpe laeuft *)
var x,Geschw,Re,Pr,Nu_turbulent,Nu_laminar,
    Nu0,Nu,Di,St,Xi0,Xi,K1,K2,K10,St0      : real;
begin
  Di := Sondendurchmesser - 2 * Dicke_Sondenrohr;
  if not Koaxialsonde then Geschw := 2*Massenstrom/rhoSole/sqr(Di)/Pi
    else Geschw := Massenstrom/rhoSole/Pi
    / (sqr(Di/2) - sqr(Innenrohrdurchmesser/2));
  Re := Geschw * Di / nueSole; (* Reynoldszahl *)
  Pr := NueSole * rhoSole * cpSole / lambdaSole; (* Prandtlzahl *)
  (* Xi = Druckverlustkoeffizient nach Petukhov (1970) *)
  if Hellstroem then Xi := 1 / sqr(1.58*ln(Re) - 3.28)
    else Xi := 1 / sqr(1.82*ln(Re)/ln(10) - 1.64);
  (* Stantonzahl nach Petukhov (1970), gueltig fuer turbulenten Bereich *)
  K1 := 1 + 27.2 * Xi / 8;
  K2 := 11.7 + 1.8 / hoch(Pr,1/3);
  St := Xi/8 / ( K1 + K2 * sqrt(Xi/8) * (hoch(Pr,2/3)-1)); (* Stantonzahl *)
  (* Stantonzahl nach Petukhov an der Grenze turbulent-Uebergangszone *)
  Xi0:= 0.031437;
  K10:= 1.106886;
  St0:= Xi0/8 / ( K10+ K2 * sqrt(Xi0/8) * (hoch(Pr,2/3)-1));
  Nu0:= St0*10000*Pr; (* Nusseltzahl beim Uebergang turbulent-Uebergangszone *)
  Nu_turbulent := St * Re * Pr; (* Nusseltzahl turbulente Zone *)
  Nu_laminar := 4.36; (* Nusseltzahl laminare Zone *)

  if Re >= 10000 then Nu := Nu_turbulent; (* turbulent *)
  if Re <= 2300 then Nu := Nu_laminar (* laminar *)
  else if Hellstroem then Nu:=Nu_turbulent else
    if Re < 10000 then Nu := Nu_laminar (* Uebergangszone laminar/turbulent *)
      * exp(ln(Nu0/Nu_laminar) / ln(10000/2300) * ln(Re/2300));
  x := Nu * lambdaSole / Di;
  alpha1 := x;
end;
```

## 10.2.2 Quellcode für die Berechnung der Bohrlochwiderstände Ra und Rb

```

Procedure Bohrlochwiderstaende(lambdaFill: real; var R1,Ra,Rb,Rc : real);
var i : integer;
begin
    (* Widerstaende im Bohrloch *)

    if Koaxialsonde then begin
        (* Koaxialsonden *)
        if Hellstroem then begin
            R1:=1/2/Pi/dl*(1/alpha/r[0] + ln(Sondendurchmesser/2/r[0])/lambdaRohr
                + ln(rz[1]*2/Sondendurchmesser)/lambdaFill);
            Ra := 1/2/Pi/alpha2/ri + 1/Pi/alpha3/Innenrohrdurchmesser
                + ln(Innenrohrdurchmesser/2/ri)/lambdaInnenrohr/2/Pi;
            Rb := R1*dl + 1/2/Pi*ln(r[1]/rz[1])/lambdaFill;
        end else begin
            if Rc > 0 then Rb := Rc + 1/2/Pi/alpha/r[0];
            if (( Ra > 0 ) and ( Rb > 0 )) then begin
                R1 := Rb/dl - 1/2/Pi/dl*ln(r[1]/rz[1])/lambdaFill;
            end else if Rb > 0 then begin
                Ra := 1/2/Pi/alpha2/ri + 1/Pi/alpha3/Innenrohrdurchmesser
                    + ln(Innenrohrdurchmesser/2/ri)/lambdaInnenrohr/2/Pi;
                R1 := Rb/dl - 1/2/Pi/dl*ln(r[1]/rz[1])/lambdaFill;
            end else if R1 > 0 then begin
                Ra := 1/2/Pi/alpha2/ri + 1/Pi/alpha3/Innenrohrdurchmesser
                    + ln(Innenrohrdurchmesser/2/ri)/lambdaInnenrohr/2/Pi;
                Rb := R1*dl + 1/2/Pi*ln(r[1]/rz[1])/lambdaFill;
            end else begin
                R1:=1/2/Pi/dl*(1/alpha/r[0]+ln(rz[1]/r[0])/lambdaFill);
                Ra := 1/2/Pi/alpha2/ri + 1/Pi/alpha3/Innenrohrdurchmesser
                    + ln(Innenrohrdurchmesser/2/ri)/lambdaInnenrohr/2/Pi;
                Rb := R1*dl + 1/2/Pi*ln(r[1]/rz[1])/lambdaFill;
            end;
        end;
        Rc := Rb - 1/2/Pi/alpha/r[0];
    end;
    (* Koaxialsonde *)
    if not Koaxialsonde then begin
        (* Doppel - U - Sonde *)
        if Hellstroem then begin
            Sigma := (lambdaFill-lambdaErd)/(lambdaFill+lambdaErd);
            if Sondendurchmesser > 2* r[0] then
                Beta := lambdaFill*(1/alpha/r[0]+1/lambdaRohr*ln(Sondendurchmesser/2/r[0]))
            else Beta:=lambdaFill/alpha/r[0];
            Ra := 1/Pi/lambdaFill*(ln(sqrt(2)*Exzentrizitaet*r[1]/r[0])
                -0.5*ln(2*Exzentrizitaet*r[1]/r[0])
                -0.5*Sigma*ln((1-sqr(sqr(Exzentrizitaet)))/(1+sqr(sqr(Exzentrizitaet)))))
                + Beta/2/Pi/lambdaFill;
            Rb := 1/8/Pi/lambdaFill*(Beta+ln(r[1]/r[0])+ln(r[1]/Bu)
                +Sigma*ln(sqr(sqr(r[1]))/(sqr(sqr(r[1]))-sqr(sqr(Bu/2)))))
                -sqr(r[0])/sqr(Bu)*sqr(1-Sigma*sqr(sqr(Bu)))/4
                /(sqr(sqr(r[1]))-sqr(sqr(Bu/2)))))
                /( (1+Beta)/(1-Beta) + sqr(r[0])/sqr(Bu)
                *(1+Sigma*sqr(sqr(Bu))*sqr(sqr(r[1]))
                /sqr(sqr(sqr(r[1]))-sqr(sqr(Bu/2))))) );
            R1 := Ra/4/dl;
        end else begin
            if Rc > 0 then Rb := Rc + 1/8/Pi/alpha/r[0];
            if (( Ra > 0 ) and ( Rb > 0 )) then begin
                R1 := Ra/4/dl;
            end else if Rb > 0 then begin
                R1 := Rb/dl - 1/2/Pi/dl*ln(r[1]/rz[1])/lambdaFill;
                Ra := R1 * 4 * dl;
            end else if R1 > 0 then begin
                Ra := R1 * 4 * dl;
                Rb := R1*dl + 1/2/Pi*ln(r[1]/rz[1])/lambdaFill;
            end else begin
                R1 := 1/8/Pi/dl * (1/alpha/r[0] + ln((r[1]-rz[1])/r[0])/lambdaFill);
                Ra := R1 * 4 * dl;
                Rb := R1*dl + 1/2/Pi*ln(r[1]/rz[1])/lambdaFill;
            end;
        end;
        Rc := Rb - 1/8/Pi/alpha/r[0];
    end;
    (* Doppel - U - Sonde *)
end;
    (* Procedure Bohrlochwiderstaende *)

```

### 10.2.3 Quellcode für die Integration der Bohrlochwiderstände Ra und Rb

Der nachfolgende Auszug zeigt die Anpassung in der Procedure „InitEWS“ mit dem Aufruf der neuen Procedure „Bohrlochwiderstaende“:

```
for i:=1 to DimAxi do begin          (* Berechnung der Bohrlochwiderstaende *)
  if not FillVariabel then begin
    RaV[i]:=Ra; RbV[i]:=Rb; RcV[i]:=Rc; RlV[i]:=Rl;
  end;
  Bohrlochwiderstaende(lambdaFillV[i],RlV[i],RaV[i],RbV[i],RcV[i]);
  if Koaxialsonde then begin (* Koaxialsonde *)
    R2[i]:=1/2/Pi/dl*(ln(r[1]/rz[1])/lambdaFillV[i]+ln(rz[2]/r[1])/lambdaErde[i]);
    Lrun[i] := dl/RaV[i];
    Llrun[i] := 1 / RlV[i];
    Llstop[i]:= 1 / (RlV[i] - 1/2/Pi/alpha/r[0]/dl
      + 1/2/Pi/alpha0(lambdaSole,Sondendurchmesser)/r[0]/dl);
    Lastop[i] := Llstop[i];
  end else begin                  (* Doppel - U - Sonde *)
    R2[i] := (RbV[i] - RaV[i]/4)/dl + 1/2/Pi/dl*ln(rz[2]/r[1])/lambdaErde[i];
    Lrun[i] := 1 / RlV[i];
    Llstop[i]:= 1 / (RlV[i] - 1/8/Pi/alpha/r[0]/dl
      + 1/8/Pi/alpha0(lambdaSole,Sondendurchmesser)/r[0]/dl);
  end;
end;
Ra := 0; Rb := 0; Rc := 0; Rl := 0;
for i:=1 to DimAxi do begin
  Ra := Ra + RaV[i]/DimAxi; Rb := Rb + RbV[i]/DimAxi;
  Rc := Rc + RcV[i]/DimAxi; Rl := Rl + RlV[i]/DimAxi;
end;                               (* Ende Berechnung der Bohrlochwiderstaende *)
```

### 10.2.4 Quellcode für die Berechnung der äusseren Randbedingungen

```
Procedure RandAussen_gfunc (var TRT           : real;
                           k,Woche,Zeitschritt : integer;
                           simstep            : longint;
                           RepRandbed         : integer;
                           Q                  : MatrixQ;
                           cpErd,rhoErd,lambdaErd,
                           Rechenradius,Sondenlaenge,
                           gpar1,gpar2,gpar3,gpar4,
                           gpar5,gpar6       : real;
                           DimAxi            : integer);
{ Diese Procedure berechnet die Randbedingung mit der g-Function
  ***** }
var u,STrt,ts,g,go,Rq      : extended;
    i,j                    : integer;
begin
  ts := sqr(Sondenlaenge) / 9 / lambdaErd * rhoErd * cpErd;
  STrt:= 0;
  for i:= 1 to Woche do begin
    u := ln( i / ts * 604800 *RepRandbed );          (* Aenderung 2.10.02 *)
    if u>2.5 then u:=2.5;
    go := 0.5*u + 6.84;
    if u<uMin then g := go
      else g := gpar1 + gpar2*u + gpar3*sqr(u) + gpar4*u*sqr(u) +
        gpar5*sqr(sqr(u)) + gpar6*u*sqr(sqr(u));
    if u<-2 then if (go-0.3)>g then g:=go;
    g := g - ln(Rechenradius/Sondenlaenge/0.0005);
    Rq := g / 2 / Pi / lambdaErd;
    STrt := STrt + (-Q[k,Woche-i+1]+Q[k,Woche-i])/Sondenlaenge*DimAxi*Rq;
  end;
  Trt := STrt;
end;
```

## 10.2.5 Quellcode für die Berechnung des Sondenfluids

```

Function TBRINE(var T                                : Matrix;
                var TDown,Tup                        : Vektor;
                TSink,L0                             : real;
                L,La                                  : Vektor10;
                Zeitschritt,subdt,substep            : integer;
                var QWand                             : Vektor;
                mcpSole,mcpSoleUp,mcpSoleDown        : real;
                DimAxi                                : integer;
                stationaer                           : boolean ) :real;

var i,k                                              : integer;
    TOut,dt2,Lm0,Lm1,LmMin,L0mcpdt,
    Nichtad                                         : real;
    Td,Tu,dTa,SummeT                               : Vektor;
begin
    dt2      := Zeitschritt*60/subdt/substep;      (* [s] *)
    TDown[0] := TSink;
    TOut      := 0;
    L0mcpdt := L0 / mcpSole * dt2;
    for i:=1 to DimAxi do SummeT[i] := 0;
    for k := 1 to Substep do begin
        if Koaxialsonde then begin (** Koaxialsonde: Neu 10.1.2000 *)
            for i := 1 to DimAxi do begin
                Td[i] := (T[i,1] - TDown[i]) * L[i] / mcpsoleDown * dt2;
                if stationaer then TDown[i] := (L[i]*T[i,1]+L0*TDown[i-1]+La[i]*Tup[1+DimAxi-i])
                    / (L[i]+L0+La[i])
                else begin
                    dTa[i] := (Tup[1+DimAxi-i]-Tdown[i]);
                    TDown[i] := TDown[i] + (TDown[i-1]-TDown[i]) * L0 / mcpsoleDown * dt2
                        + dTa[i]*La[i]/mcpsoleDown*dt2 + Td[i];
                end;
                Td[i] := (T[i,1] - TDown[i]) * L[i] / mcpsoleDown * dt2;
            end;
            TUp[0] := TDown[DimAxi];
            for i := 1 to DimAxi do begin
                if stationaer then
                    TUp[i] := (La[1+DimAxi-i]*Tdown[1+DimAxi-i]+L0*TUp[i-1]) / (La[1+DimAxi-i]+L0)
                else TUp[i] := TUp[i] + (TUp[i-1]-TUp[i]) * L0 / mcpsoleUp * dt2
                    - dTa[1+DimAxi-1]* La[1+DimAxi-i] / mcpsoleUp * dt2;
            end;
            for i:= 1 to DimAxi do SummeT[i] := SummeT[i]+Td[i];
            TOut := TOut + TUp[DimAxi];
        end (** Koaxialsonde: Ende des neuen Teils ****)
        else begin (** doppel-U-Sonde ****)
            for i := 1 to DimAxi do begin
                Td[i] := (T[i,1] - TDown[i]) * L[i] / 2 / mcpsole * dt2;
                if stationaer then TDown[i] := (L[i]/2*T[i,1] + L0*TDown[i-1]) / (L[i]/2+L0)
                else TDown[i] := TDown[i] + (TDown[i-1] - TDown[i]) * L0mcpdt + Td[i];
                Td[i] := (T[i,1] - TDown[i]) * L[i] / 2 / mcpsole * dt2;
            end;
            TUp[0] := TDown[DimAxi];
            for i := 1 to DimAxi do begin
                Tu[i] := (T[1+DimAxi-i,1] - TUp[i]) * L[1+DimAxi-i] / 2 / mcpsole * dt2;
                if stationaer then
                    TUp[i] := (L[1+DimAxi-i]/2*T[1+DimAxi-i,1] + L0*TUp[i-1]) / (L[1+DimAxi-i]/2+L0)
                else TUp[i] := TUp[i] + (TUp[i-1] - TUp[i]) * L0mcpdt + Tu[i];
                Tu[i] := (T[1+DimAxi-i,1] - TUp[i]) * L[1+DimAxi-i] / 2 / mcpsole * dt2;
            end;
            for i:= 1 to DimAxi do SummeT[i] := SummeT[i]+Td[i]+Tu[1+DimAxi-i];
            TOut := TOut + TUp[DimAxi];
        end; (** Ende Doppel-U-Sonde ****)
    end;
    if Koaxialsonde then for i:=1 to DimAxi do QWand[i] := SummeT[i]*mcpSoleDown
        else for i:=1 to DimAxi do QWand[i] := SummeT[i]*mcpSole;
    TOut := TOut / Substep;
    TBRINE := TOut;
end;      (* Function TBRINE *)

```

### 10.3 Stoffwerte

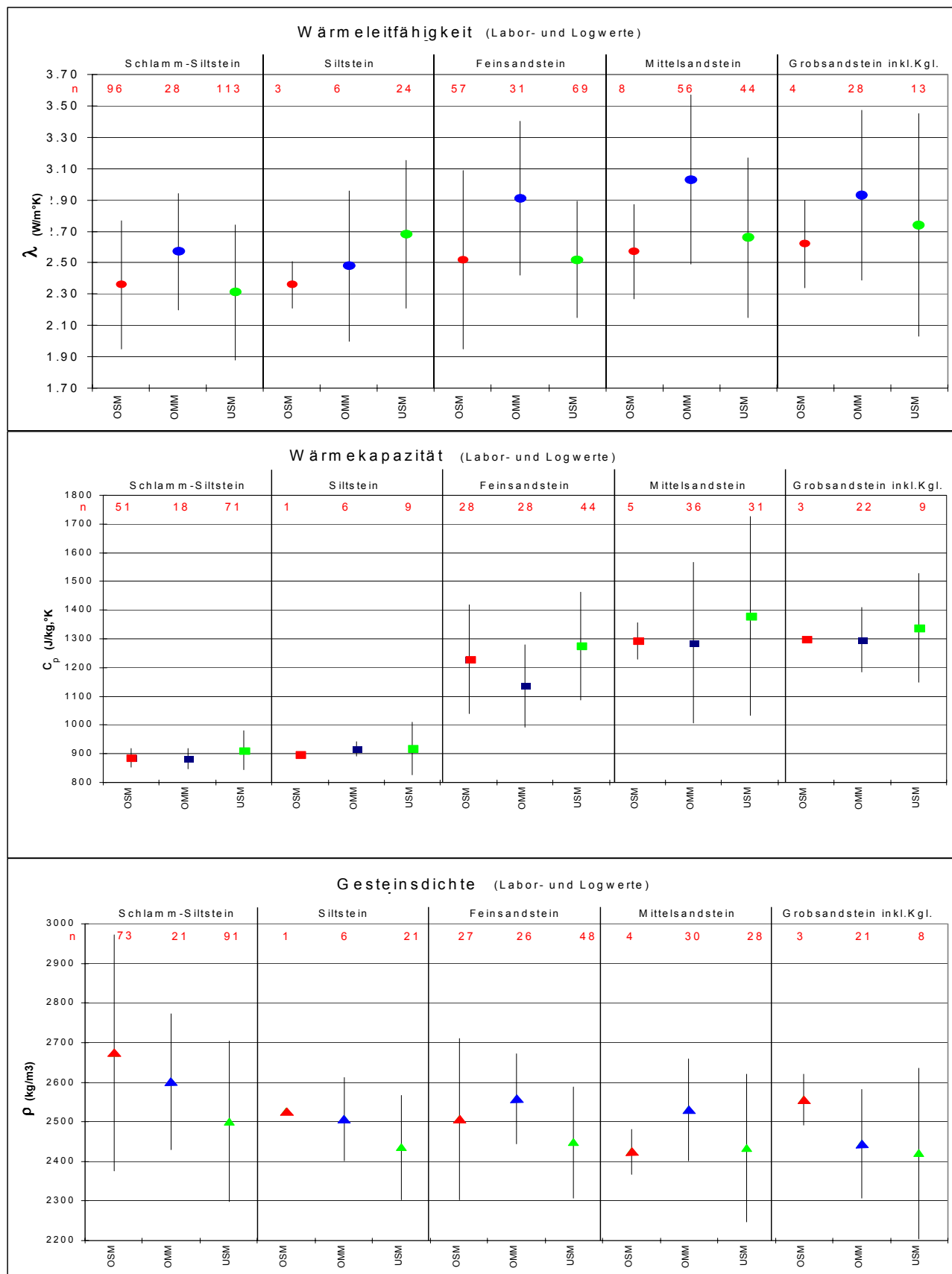


Abb. 10.9 Arithmetischer Mittelwert und Standardabweichung der Stoffwerte des Bodens im Molassebecken des Schweizerischen Mittellandes nach Leu et al. (1999).

OSM: Obere Süswassermolasse, OMM: Obere Meeresmolasse, USM: Untere Süswassermolasse

## 10.4 Dimensionslose Temperatursprungantworten (g-functions)

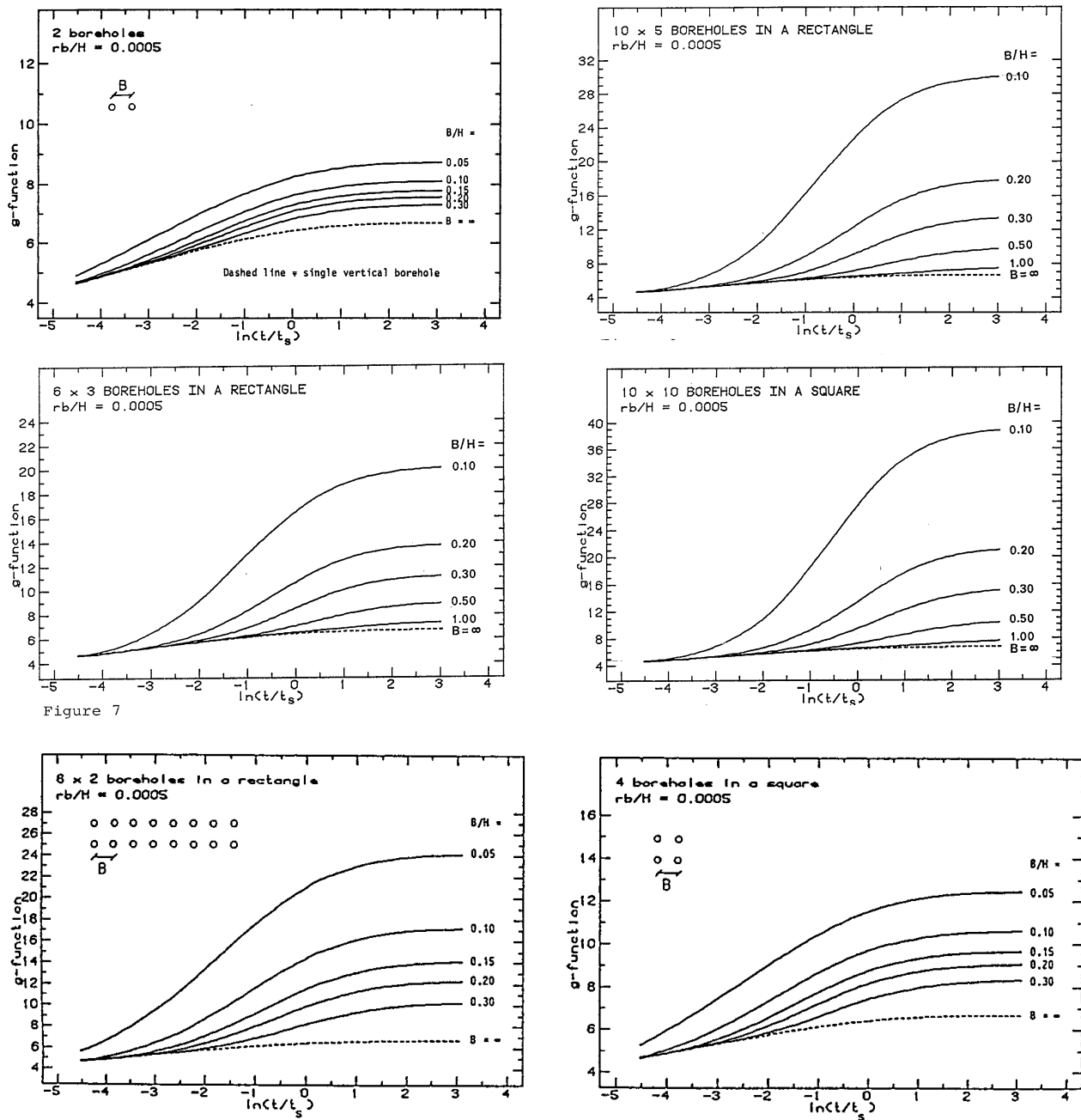
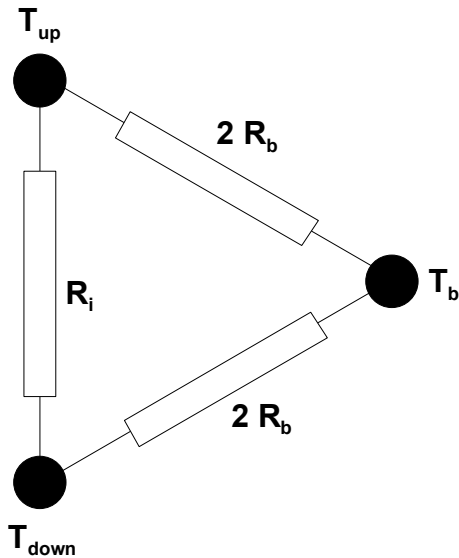


Figure 7

Abb. 10.10 Ausgewählte Temperatursprungantworten (g-functions) für Erdwärmesondenfelder aus Eskilson (1987)

## 10.5 Herleitung der Erdwärmesondengleichung für Duplex-Sonden



Für die Doppel-U-Sonde kann im Bohrloch im Falle einer symmetrischen Sondenrohranordnung das Modell für die thermischen Ersatzwiderstände gemäss Abb. 10.11 aufgestellt werden. Dabei ist  $T_b$  die Temperatur an der Bohrlochwand in der Tiefe  $z$ ,  $T_{up}$  die Temperatur des hinaufströmenden Sondenfluids in der Tiefe  $z$  und  $T_{down}$  die Temperatur des nach unten strömenden Sondenfluids in der Tiefe  $z$ .  $R_i$  ist der thermische Ersatzwiderstand zwischen  $T_{up}$  und  $T_{down}$ . Mit Hilfe von  $R_i$  kann der interne thermische Widerstandes  $R_a$  ausgedrückt werden als

$$R_a = \frac{4 \cdot R_b \cdot R_i}{4 \cdot R_b + R_i} \quad \text{Gl. 10.1}$$

Abb. 10.11 thermische Ersatzwiderstände im Bohrloch

Löst man Gl. 10.1 nach  $R_i$  auf, so erhält man

$$R_i = \frac{4 \cdot R_b \cdot R_a}{4 \cdot R_b - R_a} \quad \text{Gl. 10.2}$$

Im stationären Zustand kann man für das hinunterströmende Fluid in der Tiefe  $z$  die folgende Differentialgleichung aufstellen

$$\dot{m} \cdot c_{p_{\text{Sole}}} \cdot \frac{\partial T_{\text{down}}}{\partial z} = \dot{q}_{\text{down}}(z) \quad \text{Gl. 10.3}$$

wobei  $\dot{q}_{\text{down}}$  [W/m] der spezifische Wärmefluss aus der Hinterfüllung in das nach unten strömende Sondenfluid ist. Analog dazu sieht die Differentialgleichung für das nach oben strömende Sondenfluid in der Tiefe  $z$  aus

$$-\dot{m} \cdot c_{p_{\text{Sole}}} \cdot \frac{\partial T_{\text{up}}}{\partial z} = \dot{q}_{\text{up}}(z) \quad \text{Gl. 10.4}$$

wobei  $\dot{q}_{\text{up}}$  [W/m] der spezifische Wärmefluss aus der Hinterfüllung in das nach oben strömende Sondenfluid ist.

Der Gesamt-Wärmeentzug in der Tiefe  $z$  ist

$$\dot{q}(z) = \dot{q}_{\text{up}}(z) + \dot{q}_{\text{down}}(z) \quad \text{Gl. 10.5}$$

und somit gilt

$$\dot{q}(z) = \dot{m} \cdot c_{p_{\text{Sole}}} \cdot \frac{\partial T_{\text{down}}}{\partial z} - \dot{m} \cdot c_{p_{\text{Sole}}} \cdot \frac{\partial T_{\text{up}}}{\partial z} \quad \text{Gl. 10.6}$$

### 10.5.1 Konstanter, spezifischer Wärmeentzug $\dot{q}$

Unter der Annahme eines über die ganze Tiefe konstanten, spezifischen Wärmeentzugs  $\dot{q}$  kann Gl. 10.6 durch Integration

$$\int_0^z \partial T_{\text{down}} - \int_0^z \partial T_{\text{up}} = \frac{\dot{q}}{\dot{m} \cdot c_{p_{\text{Sole}}}} \cdot \int_0^z \partial z \quad \text{Gl. 10.7}$$

vereinfacht werden zu

$$T_{\text{down}}(z) - T_{\text{Rücklauf}} - T_{\text{up}}(z) + T_{\text{Quelle}} = \frac{\dot{q} \cdot z}{\dot{m} \cdot c_{p_{\text{Sole}}}} \quad \text{Gl. 10.8}$$

Am Sondenfuss (d.h.  $z = H$ ) gilt

$$T_{\text{down}}(H) = T_{\text{up}}(H) \quad \text{Gl. 10.9}$$

und somit wird für  $z = H$  aus

$$T_{\text{Quelle}} - T_{\text{Rücklauf}} = \frac{\dot{q} \cdot H}{\dot{m} \cdot c_{p_{\text{Sole}}}} \quad \text{Gl. 10.10}$$

Setzt man Gl. 10.10 in Gl. 10.8 ein, so erhält man

$$T_{\text{up}}(z) - T_{\text{down}}(z) = \frac{\dot{q} \cdot (H - z)}{\dot{m} \cdot c_{p_{\text{Sole}}}} \quad \text{Gl. 10.11}$$

Für das hinunter strömende Sondenfluid kann mit Hilfe der thermischen Widerstände im Bohrloch aus Abb. 10.11 die folgende Bilanzgleichung aufgestellt werden:

$$\dot{q}_{\text{down}}(z) = \frac{T_{\text{up}} - T_{\text{down}}}{R_i} + \frac{T_b - T_{\text{down}}}{2 \cdot R_b} \quad \text{Gl. 10.12}$$

Die Bohrlochtemperatur  $T_b$  kann mit Gl. 3.23 geschrieben werden als

$$T_b = \dot{q} \cdot R_b + \frac{T_{\text{up}} + T_{\text{down}}}{2} \quad \text{Gl. 10.13}$$

Durch das Einsetzen von Gl. 10.13 und Gl. 10.2 in Gl. 10.12 erhält man

$$\dot{q}_{\text{down}}(z) = \frac{\dot{q}}{2} + \frac{T_{\text{up}} - T_{\text{down}}}{R_a} \quad \text{Gl. 10.14}$$

Ersetzt man darin  $T_{\text{up}}$  und  $T_{\text{down}}$  durch die Beziehung Gl. 10.11, so erhält man

$$\dot{q}_{\text{down}}(z) = \frac{\dot{q}}{2} + \frac{\dot{q} \cdot (H - z)}{R_a \cdot \dot{m} \cdot c_{p_{\text{Sole}}}} \quad \text{Gl. 10.15}$$



Setzt man Gl. 10.15 in Gl. 10.3 ein, so erhält man

$$\frac{\partial T_{\text{down}}}{\partial z} = \frac{\dot{q}}{2 \cdot \dot{m} \cdot c_{p_{\text{Sole}}}} + \frac{\dot{q} \cdot (H - z)}{R_a \cdot \dot{m}^2 \cdot c_{p_{\text{Sole}}}^2} \quad \text{Gl. 10.16}$$

oder in der Integralform geschrieben als

$$\int_0^z \partial T_{\text{down}} = \frac{\dot{q}}{2 \cdot \dot{m} \cdot c_{p_{\text{Sole}}}} \cdot \int_0^z \partial z + \frac{\dot{q} \cdot H}{R_a \cdot \dot{m}^2 \cdot c_{p_{\text{Sole}}}^2} \cdot \int_0^z \partial z - \frac{\dot{q}}{R_a \cdot \dot{m}^2 \cdot c_{p_{\text{Sole}}}^2} \cdot \int_0^z z \cdot \partial z \quad \text{Gl. 10.17}$$

Durch die Integration wird daraus

$$T_{\text{down}}(z) = T_{\text{Rücklauf}} + \frac{\dot{q} \cdot z}{2 \cdot \dot{m} \cdot c_{p_{\text{Sole}}}} + \frac{\dot{q} \cdot H \cdot z}{R_a \cdot \dot{m}^2 \cdot c_{p_{\text{Sole}}}^2} - \frac{\dot{q} \cdot z^2}{2 \cdot R_a \cdot \dot{m}^2 \cdot c_{p_{\text{Sole}}}^2} \quad \text{Gl. 10.18}$$

Eingesetzt in Gl. 10.11 kann damit auch  $T_{\text{up}}$  berechnet werden

$$T_{\text{up}}(z) = T_{\text{Rücklauf}} + \frac{\dot{q} \cdot H}{\dot{m} \cdot c_{p_{\text{Sole}}}} - \frac{\dot{q} \cdot z}{2 \cdot \dot{m} \cdot c_{p_{\text{Sole}}}} + \frac{\dot{q} \cdot H \cdot z}{R_a \cdot \dot{m}^2 \cdot c_{p_{\text{Sole}}}^2} - \frac{\dot{q} \cdot z^2}{2 \cdot R_a \cdot \dot{m}^2 \cdot c_{p_{\text{Sole}}}^2} \quad \text{Gl. 10.19}$$

Mit Gl. 10.10 wird daraus

$$T_{\text{up}}(z) = T_{\text{Quelle}} - \frac{\dot{q} \cdot z}{2 \cdot \dot{m} \cdot c_{p_{\text{Sole}}}} + \frac{\dot{q} \cdot H \cdot z}{R_a \cdot \dot{m}^2 \cdot c_{p_{\text{Sole}}}^2} - \frac{\dot{q} \cdot z^2}{2 \cdot R_a \cdot \dot{m}^2 \cdot c_{p_{\text{Sole}}}^2} \quad \text{Gl. 10.20}$$

Die Bohrlochtemperatur  $T_b$  (Gl. 10.13) wird damit zu

$$T_b = \dot{q} \cdot R_b + \frac{T_{\text{Rücklauf}} + T_{\text{Quelle}}}{2} + \frac{\dot{q} \cdot H \cdot z}{R_a \cdot \dot{m}^2 \cdot c_{p_{\text{Sole}}}^2} - \frac{\dot{q} \cdot z^2}{2 \cdot R_a \cdot \dot{m}^2 \cdot c_{p_{\text{Sole}}}^2} = \dot{q} \cdot R_b + \overline{T_f} + \frac{\dot{q} \cdot z}{R_a \cdot \dot{m}^2 \cdot c_{p_{\text{Sole}}}^2} \left( H - \frac{z}{2} \right) \quad \text{Gl. 10.21}$$

Die über die Bohrtiefe gemittelte Bohrlochtemperatur  $\overline{T_b}$  wird zu

$$\overline{T_b} = \frac{1}{H} \cdot \int_0^H T_b \cdot \partial z = \dot{q} \cdot R_b + \overline{T_f} + \frac{\dot{q}}{R_a \cdot \dot{m}^2 \cdot c_{p_{\text{Sole}}}^2} \left( \frac{H^2}{2} - \frac{H^2}{6} \right) = \dot{q} \cdot R_b + \overline{T_f} + \frac{\dot{q} \cdot H^2}{3 \cdot R_a \cdot \dot{m}^2 \cdot c_{p_{\text{Sole}}}^2} \quad \text{Gl. 10.22}$$

Der effektive Bohrlochwiderstand  $R_b^*$  (Gl. 3.26) wird damit zu

$$R_b^* = \frac{\overline{T_b} - \overline{T_f}}{\dot{q}} = R_b + \frac{H^2}{3 \cdot R_a \cdot \dot{m}^2 \cdot c_{p_{\text{Sole}}}^2} \quad \text{Gl. 10.23}$$

Gl. 10.23 gilt bei konstantem, spezifischen Wärmeentzug über die ganze Bohrtiefe. Diese Annahme ist in der Regel bei untiefen Erdwärmesonden recht gut erfüllt.

### 10.5.2 Konstante Bohrlochtemperatur $T_b$

Bei tiefen Erdwärmesonden kann man nicht mehr von einem konstanten Wärmeentzug über die Bohrlochtiefe ausgehen. Wie Abb. 5.24 schön zeigt, findet bei tiefen Erdwärmesonden, die im Dauerbetrieb stehen, eine Temperaturangleichung an der Bohrlochwand über die Bohrtiefe statt, wobei unten ein Wärmeentzug stattfindet und oben eine Wärmeabgabe ins Erdreich. Ein besserer Ansatz bei tiefen Erdwärmesonden ist somit die Annahme einer konstanten Bohrlochtemperatur  $T_b$  über die Bohrtiefe. Eskilson und Claesson (1988) haben für diesen Fall den effektiven Bohrlochwiderstand hergeleitet:

$$R_b^* = \frac{H}{\dot{m} \cdot c_{p_{\text{Sole}}}} \cdot \sqrt{\frac{R_b}{R_a}} \cdot \coth\left(\frac{H}{\dot{m} \cdot c_{p_{\text{Sole}}} \cdot \sqrt{R_a \cdot R_b}}\right) \quad \text{Gl. 10.24}$$

Das interessante an dieser Beziehung ist, dass Gl. 10.25 angenähert werden kann mit

$$R_b^* \cong R_b + \frac{H^2}{3 \cdot R_a \cdot \dot{m}^2 \cdot c_{p_{\text{Sole}}}^2} \quad \text{Gl. 10.25}$$

falls

$$\frac{H}{\dot{m} \cdot c_{p_{\text{Sole}}} \cdot \sqrt{R_a \cdot R_b}} \leq 1.5 \quad \text{Gl. 10.26}$$

wobei der Fehler für  $R_b^*$  in diesem Bereich maximal 5.6 % beträgt. Dies bedeutet, dass in der Regel selbst für tiefe Erdwärmesonden in erster Näherung mit der Erdwärmesondengleichung Gl. 3.37 gearbeitet werden kann! Der Fehler für  $R_b^*$ , der dabei gemacht wird, ist in Abb. 10.12 dargestellt.

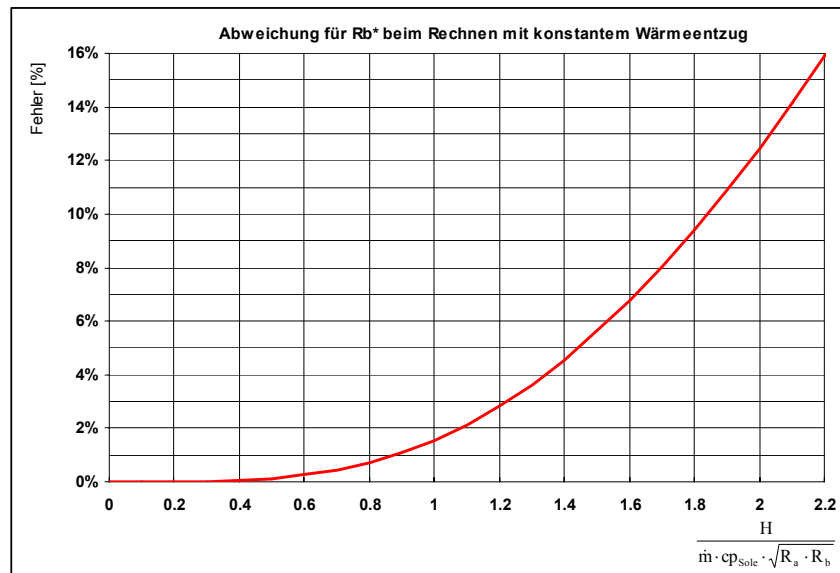


Abb. 10.12 Abweichung für  $R_b^*$  zwischen Gl. 10.24 und Gl. 10.25