



Schweizerische Eidgenossenschaft
Confédération suisse
Confederazione Svizzera
Confederaziun svizra

Eidgenössisches Departement für
Umwelt, Verkehr, Energie und Kommunikation UVEK
Bundesamt für Energie BFE

Schlussbericht 15. Dezember 2009

CO₂-Erdwärmesonde

Phase 2

Auftraggeber:

Bundesamt für Energie BFE
Forschungsprogramm Wärmepumpen, WKK, Kälte
CH-3003 Bern
www.bfe.admin.ch

Auftragnehmer:

Hochschule Luzern – Technik & Architektonik
CC Thermische Energiesysteme & Verfahrenstechnik
Technikumsstrasse 21
CH-6048 Horw
www.hslu.ch/tevt

Autoren:

Dr. Andrea Grüniger, Hochschule Luzern – Technik & Architektonik, grueniger@gmx.net
Prof. Dr. Beat Wellig, Hochschule Luzern – Technik & Architektonik, beat.wellig@hslu.ch

BFE-Bereichsleiter: Andreas Eckmanns, andreas.eckmanns@bfe.admin.ch

BFE-Programmleiter: Prof. Dr. Thomas Kopp, tkoppp@hsr.ch

BFE-Vertrags- und Projektnummer: 102'247 / 152'857

Für den Inhalt und die Schlussfolgerungen sind ausschliesslich die Autoren dieses Berichts verantwortlich.

Vorwort

Die vorliegende Studie entstand im Auftrag des Bundesamtes für Energie (BFE). Wir bedanken uns herzlich beim BFE, insbesondere bei Herrn Prof. Dr. Thomas Kopp, Leiter des Forschungsprogramms und Herrn Andreas Eckmanns, Leiter des BFE-Bereichs, für die finanzielle Unterstützung.

Weiter möchten wir unseren Projektpartnern Geowatt AG und Haka Gerodur AG unseren herzlichen Dank für die fachliche Unterstützung aussprechen. Insbesondere danken wir den Herren Dr. Roland Wagner, Dr. Thomas Mégel und Prof. Dr. Thomas Kohl (Geowatt AG), sowie Peter Mayer (Haka Gerodur AG) für den wertvollen fachlichen Gedankenaustausch.

Um unseren Dank in besonderer Weise verdient gemacht haben sich die Mitglieder der Begleitgruppe, Herr Prof. Dr. Max Ehrbar, Herr Prof. Dr. Walter Janach und Herr Peter Hubacher. Die Diskussionen im Rahmen der Begleitgruppensitzungen waren immer sehr konstruktiv und hilfreich.

Horw, im Dezember 2009

Hochschule Luzern – Technik & Architektur
CC Thermische Energiesysteme & Verfahrenstechnik

Zusammenfassung

Die Nutzung von Erdwärme zu Heizungszwecken gewinnt stetig an Bedeutung. Als Alternative zu konventionellen U-Rohr-Sonden, welche mit Wasser/Glykol (Sole) arbeiten, wurden in den letzten Jahren vor allem in Österreich und Deutschland Erdwärmesonden installiert, welche Kohlendioxid (CO_2) als Arbeitsfluid verwenden. Diese CO_2 -Erdwärmesonden arbeiten nach dem Prinzip eines Gravitationswärmerohrs. Das flüssige CO_2 rinnt an der Rohrwand nach unten, verdampft unter Aufnahme der Erdwärme und steigt in der Rohrmitte wieder auf. Aufgrund des selbsttägigen Umlaufs benötigen diese Sonden keine Umwälzpumpe. Sie werden daher auch „pumpenlose Erdwärmesonden“ genannt.

Ziel dieser Studie war es, die fluid- und thermodynamischen Vorgänge in einer CO_2 -Erdwärmesonde mit Hilfe eines Simulationsmodells zu untersuchen. Es sollte dabei auch die Möglichkeit einer Mehrfacheinspritzung des Arbeitsfluids in Betracht gezogen werden. Zudem sollte das Effizienzsteigerungspotenzial gegenüber konventionellen Sole-Sonden quantifiziert werden.

Zu Beginn der Arbeit stand eine Literaturrecherche, um die auftretenden physikalischen Phänomene einzugrenzen und in ein Modell einfließen zu lassen. In MATLAB wurde ein Simulationsmodell erstellt, welches die physikalischen Vorgänge in der Sonde mit der Wärmeleitung im umgebenden Erdreich koppelt. Im Rahmen einer Parameterstudie wurden verschiedene Einflussfaktoren hinsichtlich ihrer Auswirkungen auf das Betriebsverhalten der Sonde untersucht.

Die Resultate zeigen, dass sich die Verhältnisse in der Sonde unter bestimmten Voraussetzungen sehr gut selber stabilisieren. Beispielsweise gleichen sich Temperaturdifferenzen an der Wand in vertikaler Richtung schnell aus, indem an wärmeren Stellen CO_2 verdampft und an kälteren Stellen kondensiert. Dies führt zu einer ausgeglichenen Temperaturverteilung in vertikaler Richtung und einem gleichmässigen Wärmeentzug über die Höhe. Bei einer CO_2 -Erdwärmesonde wird der Umlauf des Arbeitsfluids CO_2 auch aufrecht erhalten, wenn die Wärmepumpe ausgeschaltet ist. Es findet somit in der Regenerationsphase ein aktiver vertikaler Energietransport statt.

Die Simulationsresultate mit mehreren Einspritzstellen zeigen auf, dass das Konzept der Mehrfacheinspritzung hinsichtlich der Wärmeübertragung keinen Vorteil bringt. Der limitierende Schritt der Wärmeübertragung liegt bei der Wärmeleitung in der Erde. Demgegenüber ist der Wärmeübergangswiderstand in der Sonde vernachlässigbar klein, so dass verschiedene Filmkonfigurationen keine Rolle spielen.

Der Vergleich mit Simulationen einer konventionellen Sole-Sonde deutet darauf hin, dass die Temperatur am Kopf einer CO_2 -Sonde etwa zwischen Vor- und Rücklauftemperatur der Sole-Sonde liegt. Das bedeutet, dass die Wärmeübertragung vom Erdreich zum CO_2 nicht wesentlich effizienter ist. Ein grosser Vorteil für die CO_2 -Erdwärmesonde ergibt sich jedoch bei der Wärmeübertragung im Verdampfer der Wärmepumpe (Kondensation CO_2 / Verdampfung Kältemittel). Der Wärmeübergang bei der Kondensation von CO_2 ist deutlich effizienter als bei der Sole ohne Phasenwechsel. Dies führt dazu, dass die Verdampfungstemperatur der Wärmepumpe bei der CO_2 -Erdwärmesonde um ca. 5°C höher liegt. Zusammen mit dem Wegfall der Umwälzpumpe führt das zu einer um ca. 15 – 25% höheren Arbeitszahl, wobei in dieser Abschätzung der längerfristige positive Effekt der besseren Regeneration noch nicht enthalten ist.

Bei der Auslegung einer CO_2 -Erdwärmesonde ist darauf zu achten, dass der Rohrdurchmesser gemäss Staugrenzenkorrelation auf die Entzugsleistung abgestimmt ist. Bei zu engen Rohren kann es aufgrund der hohen Strömungsgeschwindigkeiten zu einem Rückstau des Flüssigkeitsfilms kommen, was zu einer Leistungsbegrenzung führt. Zudem muss bei der Bemessung der Füllmenge darauf geachtet werden, dass am Ende der Sonde zum Ausgleich der Druckschwankungen ein

Flüssigkeitspool vorhanden ist. Dieser sollte allerdings nicht so hoch sein, dass die Wärmeübertragung in der Sonde beeinträchtigt wird.

Der Markt für CO₂-Erdwärmesonden wird bisher dominiert von der Österreichischen Firma M-Tec Mittermayr, welche bisher über 500 Anlagen gebaut hat. Die Schweizer Firma Brugg Pipesystems AG ist daran, mit einer speziellen Spiralwellrohrsonde in den Markt einzutreten. Konkrete Zahlen zur Energieeffizienz von bestehenden CO₂-Sonden sind bisher noch rar. Von zwei Anlagen sind die Jahresarbeitszahlen bekannt; sie liegen mit 5.0 resp. 5.25 in einem sehr hohen Bereich. Damit CO₂-Erdwärmesonden auch in der Schweiz vermehrt zum Einsatz kommen ist es wichtig, dass der Bau von Referenzanlagen gefördert wird. Nur so können Zweifel bezüglich Zuverlässigkeit und Effizienz dieser Technologie aus dem Weg geräumt werden.

Abstract

In this project the fluid dynamics and thermodynamics inside a CO₂ geothermal heat probe have been investigated. The functionality of such a probe, which works like a thermosyphon, was analyzed by means of a simulation model in MATLAB. The model couples the behaviour inside the heat probe with the heat conduction in the earth. A parameter study revealed that the self-circulation character of such a probe leads to flattening of the vertical earth temperature profile near the probe and, hence, leads to more uniform heat removal along the probe. The circulation of CO₂ even goes on when the heat pump is off. This might be advantageous for the regeneration phase. The heat transfer resistance of the evaporating CO₂ film flowing down the probe wall is very small compared to the conduction resistance of the earth. Therefore, no difference has been found between the performances of a conventional heat pipe and a configuration where the liquid phase injection is distributed on different height stages along the probe.

It is estimated that the seasonal performance factor of heat pumps can be improved by 15-25% with a CO₂ geothermal heat probe. The main advantage is that the heat transfer to the evaporator of the heat pump (condensation of CO₂ / evaporation of refrigerant) is much more efficient than in a conventional brine probe without phase change. Furthermore, no circulation pump is needed.

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	4
Abstract	6
Inhaltsverzeichnis	7
1 Einleitung.....	9
1.1 Ausgangslage	9
1.2 Ziele dieser Studie	10
1.3 Funktionsweise einer (konventionellen) Erdwärmesonde	10
1.4 Funktionsweise einer CO ₂ -Erdwärmesonde.....	11
1.5 Stand der Technik und Marktsituation	12
1.6 Idee der Mehrfacheinspritzung	15
2 Literaturrecherche	17
2.1 Allgemein	17
2.2 Stoffdaten von CO ₂	17
2.3 Strömungsverhältnisse in der Sonde.....	19
2.4 Thermodynamik in der Sonde.....	24
3 Modellierung der CO ₂ -Erdwärmesonde	28
3.1 Modellstruktur	28
3.2 Modellblock CO ₂ -Erdwärmesonde.....	29
3.3 Modell des Erdreichs	34
3.4 Kopplung der Modelle	36
3.5 Referenzbedingungen.....	37
4 Resultate	39
4.1 Modell Erdwärmesonde ungekoppelt	39
4.2 Zeitabhängiges Verhalten bei Blockbelastung	40
4.3 Parameterstudie.....	43
4.4 Quantitativer Vergleich mit einer Wasser-/Glykol-Sonde	51
5 Machbarkeitsstudie und Auslegungskriterien	55
5.1 Dimensionierung der Rohre	55
5.2 Rohrmaterial	56
5.3 Wärmeümbetrager am Sondenkopf.....	56
5.4 Alternative Arbeitsfluide	57
5.5 Füllmenge	57
5.6 Einbringen der Rohre.....	57
6 Schlussfolgerungen.....	58
7 Symbolverzeichnis	60
7.1 Formelzeichen	60
7.2 Griechische Symbole	61
7.3 Indizes.....	61
7.4 Dimensionslose Kennzahlen	61
7.5 Abkürzungen.....	62
8 Literaturverzeichnis	63
A1 Details zum Berechnungsmodell.....	65

A1.1	Iterationsverfahren zur Bestimmung des Sondendrucks	65
A1.2	Crank-Nicolson-Verfahren zur Lösung der Wärmeleitungsgleichung.....	65

1 Einleitung

1.1 Ausgangslage

Die Nutzung von Erdwärme zur Beheizung von Wohnraum gewinnt stetig an Bedeutung. Gemäss einer Statistik der Fördergemeinschaft Wärmepumpen¹ erreichten Wärmepumpen (WP) im Jahr 2007 in der Schweiz einen Marktanteil von 73% bei neu erstellten Einfamilienhäusern. Davon machten wiederum die Sole/Wasser-WP 42.4% aus. Es kann davon ausgegangen werden, dass diese im Zusammenhang mit einer Erdwärmesonde genutzt werden. Dies bedeutet, dass ca. 30% aller neu erstellten Einfamilienhäuser mit Erdwärme beheizt werden.

In der Regel handelt es sich dabei um senkrecht verlegte U-Rohr-Sonden, bei denen die Erdwärme durch Umwälzen einer Wasser/Glykol-Lösung, auch Sole genannt, genutzt wird. Als Alternative zu dieser konventionellen Technologie wurden in den letzten Jahren vor allem in Deutschland und Österreich eine beträchtliche Anzahl Erdwärmesonden (EWS) installiert, welche Kohlendioxid (CO_2) als Arbeitsfluid nutzen. Diese CO_2 -Erdwärmesonden arbeiten nach dem Prinzip eines Gravitationswärmerohrs und benötigen aufgrund des selbsttätigen Umlaufs des Arbeitsfluids keine Umwälzpumpe. Sie werden daher auch „pumpenlose Erdwärmesonden“ genannt. Weitere Synonyme sind Thermosiphon oder Heat Pipe. Die Funktionsweise solcher Sonden wird in Kapitel 1.4 detailliert erläutert. Bei korrekter Dimensionierung der Sonde ist zu erwarten, dass die Jahresarbeitszahl höher liegt als bei konventionellen Sonden, da einerseits die benötigte elektrische Energie für die Umwälzpumpe wegfällt und andererseits durch eine effizientere Wärmeübertragung zwischen Erdreich und Arbeitsfluid höhere Verdampfungstemperaturen erzielt werden können. Zudem hat CO_2 gegenüber Wasser/Glykol den Vorteil, dass es im Fall einer Leckage nicht umweltgefährdend ist. Daher könnten CO_2 -EWS auch in Grundwasserschutzgebieten installiert werden.

Das Potenzial von CO_2 -EWS wurde durch das Bundesamt für Energie (BFE) erkannt und es wurde eine erste Machbarkeitsstudie finanziert, welche an der Interstaatlichen Hochschule für Technik in Buchs unter der Leitung von Prof. Dr. Max Ehrbar durchgeführt wurde [1]. Diese zeigte auf, dass mit einer CO_2 -EWS gegenüber einer Wasser/Glykol-EWS die Jahresarbeitszahl der Wärmepumpe um ca. 12 – 15% erhöht werden kann. Jedoch wurden auch gewisse Grenzen und Probleme bei der Verwendung von solchen Sonden aufgezeigt. So muss der Durchmesser der Wärmerohre grösser gewählt werden als bei konventionellen Sole-Sonden, um einen Rückstau des Flüssigkeitsfilms durch den aufsteigenden Dampf zu vermeiden (Staugrenze, siehe Abschnitt 2.3.2). Je länger die EWS bzw. je höher die Wärmeleistung der Sonde sein soll, desto grösser muss der Rohrdurchmesser sein, um einen gleichmässigen Wärmeentzug über der ganzen Sondenlänge zu erreichen. Dies führt zu Problemen beim Einbau ab Haspel, da grössere Rohre, welche auch entsprechend dickere Wandstärken aufweisen müssen, schlechter wickelbar sind. Es müssen also neue Rohrkonzepte entwickelt werden. Auf diesem Hintergrund entstand die Idee der sogenannten „Mehrfacheinspritzung“, wobei das flüssige CO_2 durch ein konzentrisches Innenrohr mit Einspritzvorrichtungen auf verschiedenen Höhenstufen an die Wand der Sonde gespritzt werden soll.

Gleichzeitig wurde erkannt, dass die komplexen fluid- und thermodynamischen Vorgänge, welche in einer CO_2 -EWS ablaufen, bisher kaum verstanden werden. Im Rahmen dieses BFE-Projektes (Phase 2) sollen die offenen Fragen bezüglich Strömung und Wärmetransport untersucht werden. Das Hauptziel ist, die physikalischen Vorgänge in einer CO_2 -Erdwärmesonde transparent darzustellen und dabei auch das Konzept der Mehrfacheinspritzung einzubeziehen. Es soll untersucht werden, ob mit diesem Prinzip die Sondenoberfläche gleichmässiger ausgenutzt werden kann. Dabei soll auch die technische Realisierbarkeit einer solchen Sonde aus Kunststoff geprüft werden. Über eine allfällige (experimentelle) Fortsetzung des Projekts wird anschliessend entschieden.

¹ <http://www.fws.ch>

1.2 Ziele dieser Studie

Das Projekt sieht folgende konkreten Zielsetzungen vor:

1. Verbessertes Verständnis der relevanten fluid- und thermodynamischen Prozesse in der Sonde.
2. Erstellen eines Simulationsmodells, welches die physikalischen Vorgänge in der EWS bei einfacher und mehrfacher CO₂-Aufbringung beschreibt, sowie die Wechselwirkung mit dem Erdreich berücksichtigt.
3. Quantifizierung des Effizienzsteigerungspotenzials im Vergleich zu herkömmlichen Wasser/Glykol-Erdwärmesonden.
4. Abklärung der technischen Machbarkeit solcher CO₂-EWS aus Kunststoff.
5. Schaffen der Entscheidungsgrundlagen für die Durchführung einer allfälligen Phase 3 und Festlegen der Zielsetzung (falls die vorliegende Phase 2 ein Effizienzsteigerungspotenzial und die grundsätzliche Machbarkeit einer solchen Sonde zeigt).

1.3 Funktionsweise einer (konventionellen) Erdwärmesonde

Die Aufgabe einer Erdwärmesonde entspricht dem eines Wärmetauschers, um das riesige Energiereservoir im Erdinneren zu Heizungszwecken nutzbar zu machen. Ab einer Tiefe von ca. 10 m unter der Erdoberfläche ist die vorherrschende Erdreichtemperatur nahezu unabhängig von jahreszeitlichen Schwankungen, sofern keine starke Grundwasserzirkulation vorliegt. Im Schweizer Mittelland liegt die Bodentemperatur dort bei 11 bis 12°C [2]. Mit zunehmender Tiefe steigt die Temperatur mit einem Gradienten von ca. 0.03°C/m.

Um die Erdwärme direkt zur Gebäudeheizung zu nutzen, d.h. um Wasser direkt auf das erforderliche Temperaturniveau von deutlich über die Raumtemperatur aufzuwärmen, sind Bohrungen mit einer Tiefe von rund 1000 m notwendig. Dies ist nur unter guten geologischen Voraussetzungen möglich und bedingt hohe Investitionskosten, welche sich nur bei Grossprojekten lohnen. Für ein durchschnittliches Einfamilienhaus kommen in der Regel Erdwärmesonden mit 50–150 m Länge zum Einsatz. In dieser Tiefe beträgt das Temperaturniveau der Erde zwischen 12 und 14°C. Um das Temperaturniveau zum Heizkreislauf hin zu erhöhen sind diese Sonden daher mit einer Wärmepumpe gekoppelt. Es soll hier direkt auf die vertikal verlegten Erdwärmesonden eingegangen werden. Spezialformen der Erdwärmesondeneutzung wie Erdwärmekörbe oder horizontale Erdwärmekollektoren werden an dieser Stelle nicht berücksichtigt.

Konventionelle Erdwärmesonden bestehen in der Regel aus einem U-Rohr, durch welches mit Hilfe einer Umwälzpumpe Flüssigkeit, meist eine Wasser/Glykol-Mischung, zirkuliert wird (Abb. 1-1). Solche Sonden werden auch Sole-Sonden genannt. Die Sole erwärmt sich unter Aufnahme von Erdwärme und gibt diese Wärme im Verdampfer der Wärmepumpe an das Kältemittel ab. Entscheidend für die Energieeffizienz der Wärmepumpe ist, wie viel elektrische Energie im Vergleich zur Nutzenergie (gelieferte Heizenergie) benötigt wird. Folgende Kennzahlen werden für die Bewertung der Energieeffizienz herangezogen. Der Coefficient of Performance (COP) bezeichnet den Quotienten zwischen der von der Wärmepumpe im Kondensator abgegebenen Heizleistung und der aufgewendeten elektrischen Leistung (Kompressor und Umwälzpumpe). Der COP-Wert ist nur eine Momentaufnahme. Man betrachtet deshalb eine so genannte Arbeitszahl (AZ), welche sich auf ein bestimmtes Zeitintervall bezieht. Wählt man für dieses Intervall ein Jahr, so spricht man von der Jahresarbeitszahl (JAZ). Die Arbeitszahl ist analog zur Leistungszahl definiert. Die Leistungen und Wärmeströme werden jedoch über das betrachtete Zeitintervall aufintegriert

Durch den Wärmeentzug kühlt sich das Erdreich um die Sonde ab. Zu starke Abkühlung sollte aber vermieden werden. Durch Eisbildung kann es zu Beschädigungen der Sonde kommen. Zudem sinkt die Effizienz der Wärmepumpe wenn die Erdreichtemperatur sinkt, da dies eine tiefere Verdampfungstemperatur mit sich bringt. Der Wärmeentzug sollte mit der nachströmenden

Wärmemenge vom Erdinneren sowie von der Oberfläche (Sonnenenergie) im Gleichgewicht stehen. Die längenspezifische Entzugsrate muss den geologischen Gegebenheiten angepasst werden und ist daher regionenspezifisch.

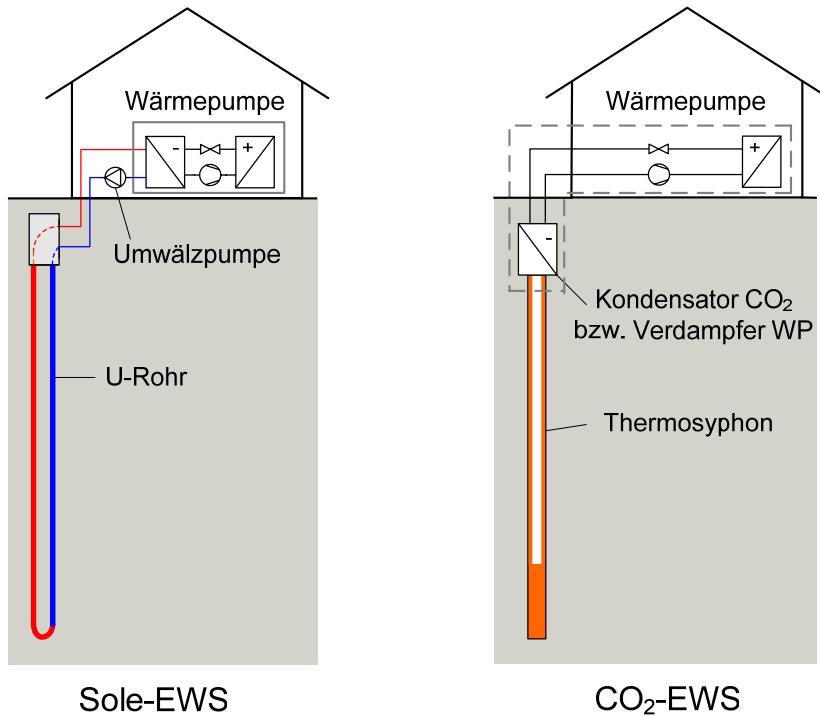


Abb. 1-1: Schematischer Vergleich einer Sole-Erdwärmesonde mit einer CO₂-Erdwärmesonde nach [1].

1.4 Funktionsweise einer CO₂-Erdwärmesonde

Wie in Abb. 1-1 ersichtlich besteht die CO₂-Erdwärmesonde aus einem geschlossenen Rohr, welches mit einem Druck von 30 bis 50 bar beaufschlagt ist. Das Arbeitsfluid CO₂ liegt zweiphasig vor. Der selbstständige Transport des Arbeitsfluids erfolgt nach dem sogenannten Thermosiphon- oder Gravitationswärmerohrprinzip. Dieses ist in Abb. 1-2 schematisch gezeigt. Das flüssige Arbeitsfluid rinnt aufgrund der Schwerkraft an der Rohrwand nach unten. Im Bereich der Heizzone, wo die Temperatur an der Außenwand höher ist als im Rohrinnern, kommt es zur Verdampfung des Flüssigkeitsfilms. Der Dampf steigt auf und kondensiert im oberen, kälteren Bereich wieder. Es findet also ein selbsttätiger Wärmetransport von unten nach oben statt. Voraussetzung dafür ist ein positiver Temperaturgradient gegen unten an der Rohraußenwand. Der im Rohr herrschende Druck stellt sich aufgrund der Temperaturverhältnisse in der Sonde und der Sondenleistung ein (siehe Kap. 3.2).

Je nach Füllmenge bildet sich am Rohrende ein Flüssigkeitspool, wo ebenfalls Verdampfung stattfindet. Allerdings ist der Wärmeübergangskoeffizient bei der Filmverdampfung höher als bei der Poolverdampfung. Zudem erfolgt der Druckanstieg im Pool mit zunehmender Tiefe aufgrund der höheren Dichte viel steiler an als in der Gasphase. Daher kann die Siedetemperatur im Pool höher liegen als die Außentemperatur, sodass keine Verdampfung stattfindet. Die Füllmenge sollte daher so bemessen werden, dass zwar immer ein Pool vorhanden ist, dieser jedoch möglichst klein bleibt.

Bei einer CO₂-Erdwärmesonde ist die „Kühlzone“ die Kopplung zur Wärmepumpe. Sie ist in der Regel direkt am Sondenkopf platziert und ist als Wärmeübertrager ausgestaltet, der als Verdampfer für das Kältemittel der Wärmepumpe und als Kondensator für das CO₂ in der Erdwärmesonde dient. Dies bedeutet, dass die Wärmepumpe „gesplittet“ werden muss.

Ein grosser Vorteil der CO₂-Erdwärmesonde im Vergleich zu einer konventionellen Sonde ist der Wegfall der Umwälzpumpe, da das Arbeitsfluid selbstständig zirkuliert. Zudem ist der Wärmeübergangswiderstand bei der Filmverdampfung bzw. Kondensation kleiner als in einer Rohrströmung ohne Phasenwechsel. Das bedeutet, dass zur Erreichung der gleichen Wärmestromdichte eine kleinere Temperaturdifferenz genügt, was wiederum die Effizienz der Wärmepumpe erhöht.

Weiter ist das Arbeitsfluid CO₂ ungiftig und nicht grundwassergefährdend. So wurde die bis vor Kurzem einzige CO₂-Erdwärmesonde in der Schweiz in Bubendorf BL für einen in einer Grundwasserzone liegenden Gewerbebau bewilligt [3].

Nachteilig im Vergleich zu einer konventionellen Erdwärmesonde ist bei einer CO₂-Sonde die Tatsache, dass sie nicht zu Kühlzwecken eingesetzt werden kann. Wird der Temperaturgradient umgekehrt, funktioniert das Wärmerohrprinzip, welches auf Auftriebskräften aufgrund abnehmender Gasdichte gegen oben beruht, nicht mehr.

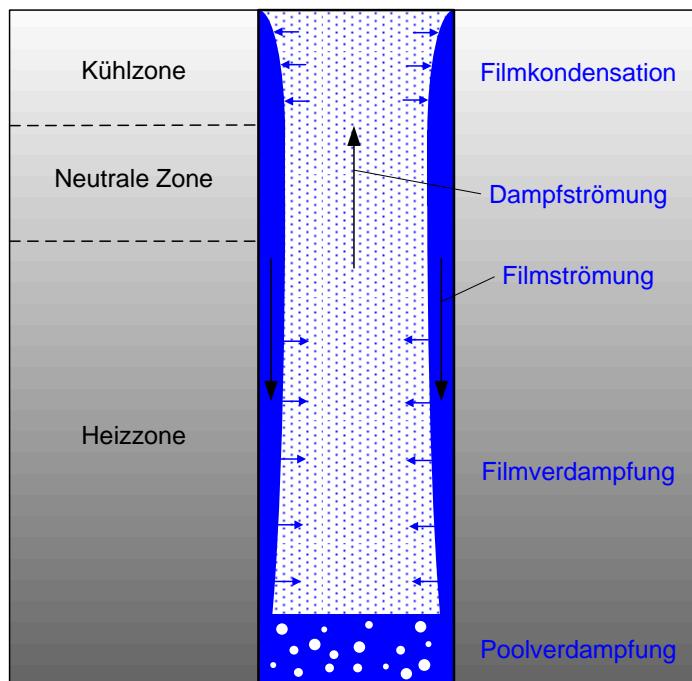


Abb. 1-2: Schematische Funktionsweise eines Wärmerohrs

1.5 Stand der Technik und Marktsituation

Die Entwicklung der CO₂-Erdwärmesonde geht zu einem grossen Teil auf Karl Mittermayer, Gründer der Firma M-Tec Mittermayr in Arnreit (A) zurück. Seit 1999 erprobte er diese Technologie und brachte sie als Erster zur Marktreife. Die Firma Heliotherm, welche die Wärmepumpen dazu liefert, fungierte dabei als Partner. Die Entwicklungsphase wurde vom Institut für Wärmetechnik an der TU Graz (A) begleitet [4]. Abb. 1-3 zeigt die Entwicklung der total installierten CO₂-EWS in Mitteleuropa durch die Firma M-Tec Mittermayr gemäss eigenen Angaben. Die Summe beläuft sich bis Ende 2008 auf ca. 500 Anlagen. Dabei sind jedoch die durch den Lizenznehmer Heliotherm erstellten Anlagen nicht eingerechnet. Gemäss Schätzungen von Karl Mittermayer käme dadurch nochmals ca. die Hälfte dazu. Mehr als 70% der M-Tec Anlagen fallen in den Leistungsbereich von 8 bis 12 kW. Die meisten Sonden sind zwischen 50 und 75 m tief, kaum je über 100 m. Dies hängt damit zusammen, dass die meisten Bohrfirmen nur für Bohrungen bis 100m eingerichtet sind. Zumindest in Deutschland kommt

dazu, dass tiefere Bohrungen unter Deutsches Bergbaurecht fallen und das Bewilligungsverfahren aufwändiger ist.

M-Tec Mittermayr arbeitet heute meist mit jeweils 3 schräg auseinander laufenden Bohrlöchern. Als Sondenmaterial werden PE-ummantelte Kupferrohre verwendet, meist 4 pro Bohrung. Wenn zusätzlich gekühlt werden soll, werden Hybridsonden eingesetzt. Diese bestehen aus mindestens zwei Bohrlöchern mit je einer Sole-Sonde und einer CO₂-Sonde.

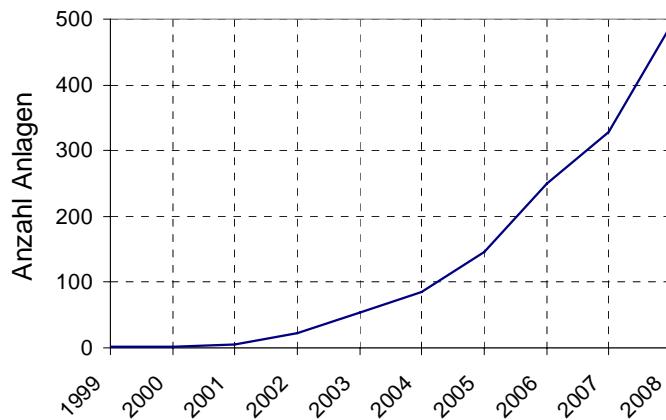


Abb. 1-3: Kumulierte Anzahl der von der Firma M-Tec Mittermayr (A) gebauten CO₂-Erdwärmesonde.

In der Schweiz fungiert die Firma Kibernetik AG in Buchs SG als Lizenznehmer für M-Tec Mittermayr Anlagen. Die erste und bis vor kurzem einzige CO₂-EWS in der Schweiz wurde 2004 bei einem Gewerbehaus in Bubendorf BL in Betrieb genommen [3]. Es ist dabei zu erwähnen, dass sie trotz Standort in einer Grundwasserzone bewilligt wurde. Die Komponenten stammen von M-Tec/Heliotherm. Die Anlage beinhaltet zwei 75 m Bohrlöcher mit je 4 Kupferrohren (\varnothing 14x1 mm). Sie wird zur Beheizung von 550 m² Fussboden verwendet. In der ersten Heizsaison wurde eine Jahresarbeitszahl von 5.0 ermittelt. Gemäss Betreiber läuft die Anlage seit der Installation ohne Probleme.

Eine weitere Anlage von M-Tec Mittermayr wurde 2006 im deutschen Bensheim bei einem Wohnhaus errichtet [5]. Sie besteht aus 3 x 4 Sondenrohren von ca. 75 m Tiefe und liefert ca. 13 kW Entzugsleistung. Sie wird sowohl zur Beheizung wie auch zur Warmwasser-Aufbereitung verwendet. Die aktuellen Betriebsdaten werden auf einer eigenen Website publiziert². Im Zeitraum von September 2006 bis September 2009 erreichte sie eine Arbeitszahl von 5.25 (Heizung 5.93, Warmwasser 3.99).

Parallel zu den Aktivitäten in Österreich betreibt auch das Forschungszentrum für Kältetechnik und Wärmepumpen (FKW) Hannover unter der Leitung von Prof. Dr. H. Kruse Forschung auf diesem Gebiet. Auf dem FKW-Gelände wurden zwei parallele Sonden, eine Duplex-Sole-Sonde und ein CO₂ Erdwärmerohr, von je 100m Tiefe im Betrieb getestet. Allerdings konnten die Sonden wegen eines Dimensionierungsfehlers der CO₂-Sonde (Staugrenze überschritten) nicht direkt verglichen werden [6].

Die Forschungsarbeiten führten zur Entwicklung eines flexiblen Edelstahlrohrs mit Spiralwellung (Abb. 1-4). Im Zeitraum zwischen 2005 und 2007 wurden ca. ein Dutzend solcher Pilot-CO₂-Erdwärmesonden zur Beheizung von Einfamilienhäusern in Deutschland und Österreich installiert. Dabei sollen keine „wesentlichen Betriebsstörungen“ aufgetreten sein [7].

² <http://www.co2-erdsonde-bensheim.de/>



Abb. 1-4: Patentiertes Edelstahl-Spiralrohr der Firma Brugg Pipesystems.

Seit 2007 hat die Firma Brugg Rohrsysteme GmbH, Deutsche Tochter der Schweizer Brugg AG Holding, die Lizenz zur Vermarktung und Herstellung der Wellrohrsonde. Unter dem Namen „GECO₂“ bieten sie zwei verschiedene Edelstahlrohre (\varnothing 39/44, \varnothing 48/55) und den entsprechenden Sondenkopf mit Druckbehälter und Bündelrohrwärmetauscher an. Der Vorteil des Spiralrohrs besteht hauptsächlich darin, dass es diffusionsdicht und trotz grossem Durchmesser flexibel ist und ab Haspel in die Bohrung eingebracht werden kann. Edelstahl hat im Vergleich zu Kunststoff eine hohe Wärmeleitfähigkeit und dank der Wellung eine grössere Oberfläche. Laut Hersteller rinnt zudem das flüssige CO₂ in den Rillen nach unten und verhindert einen Rückstau durch das aufströmende Gas. Dazu gibt es jedoch keine wissenschaftlichen Untersuchungen.

In diesem Jahr wurden in der Schweiz zwei CO₂-EWS Pilotanlagen mit dem GECO₂-System zur Beheizung von Einfamilienhäusern errichtet. Die erste Anlage in Bichelsee TG ging im Juli 2009 in Betrieb und ist mit einer Tiefe von 130 m ausgelegt auf 7.5 kW Entzugsleistung. Die zweite Sonde in Gebenstorf AG (190 m, ca. 11.8 kW Entzugsleistung) läuft seit November 2009. Die Betriebsdaten bei beiden Anlagen werden vom Wärmepumpentestzentrum in Buchs SG aufgenommen und ausgewertet und sollen im Frühling nächsten Jahres erste Rückschlüsse auf die Energieeffizienz der Anlagen ermöglichen.

Die Firmen M-Tec Mittermayr inkl. Lizenznehmer sowie Brugg Pipesystems sind nach dem Wissensstand der Autoren momentan die einzigen Anbieter von CO₂-Erdwärmesonden auf dem Markt. Sie verkörpern gleichzeitig auch zwei unterschiedliche Systeme. Während M-Tec den Wärmeentzug auf mehrere kleinere Rohre und mehrere Bohrlöcher verteilt, arbeitet Brugg Pipesystems mit nur einem, jedoch grösseren Rohr. Welches System insgesamt besser ist, kann an dieser Stelle nicht abschliessend beurteilt werden. Die Vor- und Nachteile der einzelnen Systeme werden in Abschnitt 5.1 diskutiert.

Es existiert leider keine unabhängige Statistik, welche verlässliche Aussagen über die Anzahl von erstellten CO₂-EWS zulässt. Ebenso sind bisher noch sehr wenige Betriebsdaten öffentlich zugänglich. Dies mag wohl damit zusammenhängen, dass der Markt noch jung ist. Insgesamt scheint es aber, dass die bisher installierten Sonden ohne nennenswerte Probleme und sehr effizient arbeiten. Es stellt sich daher die Frage, wieso in der Schweiz nicht schon mehr CO₂-EWS eingesetzt werden. Im Gespräch mit Betreibern und Lieferanten wurden folgende Hauptgründe herauskristallisiert:

- Branche: Die Wärmepumpenbranche ist dominiert von kleinen Betrieben, die weder das Know-how noch Mittel haben, um das Risiko einzugehen eine neue Technologien zu testen. Da konventionelle Sole-Sonden zuverlässig funktionieren ist die Notwendigkeit zu handeln zudem klein.
- Höhere Kosten: Im Vergleich zu einer konventionellen Sole-Sonde kostet eine CO₂-Sonde bis zu 30% mehr. Dies ist bedingt durch höhere Materialkosten für das Sondenrohr (Kupfer oder Edelstahl ggü. PE), Mehrkosten für Schacht und Wärmetauscher (Sondenkopf). Demgegenüber fällt die Umwälzpumpe weg. Allerdings dürften sich die Investitionskosten auch deutlich reduzieren, sollten die Anlagen zum Standard werden.

- Referenzprojekte: Eine Erdwärmesonde ist auf eine Laufzeit von mindestens 30 Jahre ausgelegt und lässt sich nicht auswechseln. Daher ist es für Bauherren sehr wichtig, dass sie sich anhand von Referenzen versichern können, dass die Anlage über die lange Laufzeit zuverlässig funktionieren wird. Die Angst vor einer Leckage ist dabei bei einer CO₂-EWS berechtigterweise noch grösser als bei einer Sole-Sonde. Solange Referenzen fehlen, werden es wenige Idealisten sein, welche sich für die CO₂-Technologie entscheiden.
- In der Schweiz muss sich der Bauherr mit vielen verschiedenen Ansprechpartnern auseinandersetzen. Bohrfirma, Sondenlieferant, Lieferant der Wärmepumpe, Heizungsinstallateur, Planer etc. Es fehlt ein Angebot „aus einer Hand“ mit entsprechender Garantie für die Gesamtanlage.

Der Markteintritt scheint daher weniger durch die Technologie selber als durch Probleme im Marketing erschwert.

Der Einsatz von anderen Arbeitsfluiden wie z.B. Propan oder Ammoniak anstelle von CO₂ ist zwar theoretisch denkbar und wird in der Literatur auch erwähnt [8], jedoch hat dies in der Praxis bisher keine Bedeutung. Bei Verwendung dieser Arbeitsfluide wäre mit einer verschärften Bewilligungspraxis aus Gründen der Sicherheit und Umweltgefährdung zu rechnen.

1.6 Idee der Mehrfacheinspritzung

Verschiedentlich wird in der Literatur auf die Vorteile des Doppelrohr-Wärmerohrs hingewiesen. Dabei handelt es sich um einen Wärmerohr mit konzentrischem Innenrohr, welches oben und unten eine Öffnung aufweist (Abb. 1-5). Bei entsprechenden Betriebsbedingungen kann erreicht werden, dass die Flüssigkeit mehrheitlich im Innenrohr nach unten fliesst und der Dampf im äusseren Ringspalt aufsteigt. Damit erhöht sich der maximale (kritische) Wärmestrom, bevor Flutphänomene auftreten [9]. Allerdings gilt dies nur für sehr hohe Füllgrade (> 50%), da die Wand sonst flüssigkeitsfrei ist und die Wärmeübertragung sonst nur im unteren Bereich stattfindet. Es handelt sich dabei also eher um Poolverdampfung als um Filmverdampfung.

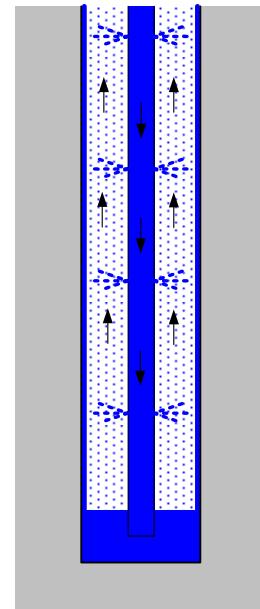
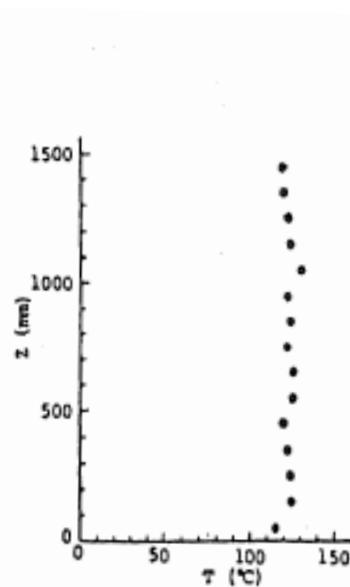
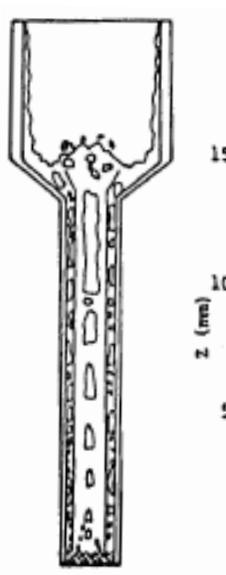


Abb. 1-5: Phasenverteilung und Temperaturverteilung in einem Doppelrohr-Thermosiphon mit R-113 nach [9].

Abb. 1-6: Prinzip der Mehrfacheinspritzung.

Um die in einer Erdwärmesonde erwünschte Filmverdampfung über die gesamte Länge zu erreichen und gleichzeitig das Problem der Staugrenze (Abschnitt 2.3.2) zu umgehen, wurde im Rahmen des Phase 1 Projektes [1] die Idee der Mehrfacheinspritzung lanciert. Dabei soll ebenfalls ein koaxiales Innenrohr in die Sonde eingebracht werden, um das Kondensat zentral nach unten zu führen. Jedoch soll dieses Rohr auf verschiedenen Höhenstufen Einspritzdüsen aufweisen (Abb. 1-6). Damit könnte sichergestellt werden, dass der Kondensatfilm gleichmässig über die Sonde verteilt ist. Zudem könnte das Problem der Staugrenze zumindest teilweise entschärft werden, indem der Hauptteil des Kondensats im Innenrohr nach unten geführt wird und nicht mit dem Gasstrom in Kontakt kommt.

Die Überprüfung dieses Konzepts auf ihr Potenzial hin war Teil der Ziele dieser Arbeit. Entsprechend wurde die Option der Mehrfacheinspritzung im Simulationsmodell berücksichtigt (Abschnitt 3.2) und die Resultate werden entsprechend diskutiert (Abschnitt 4.3.1).

2 Literaturrecherche

2.1 Allgemein

Das Prinzip des Wärmerohres ist schon seit längerer Zeit bekannt. Es wird in verschiedenen Bereichen zur Wärmeübertragung eingesetzt. So z.B. zur Kühlung von Mikroprozessoren, zum Temperaturausgleich bei Satelliten oder zur Stabilisierung des Permafrostes unter Pipelines. Es muss dabei unterschieden werden zwischen Gravitationswärmerohren, wie im Fall der Erdwärmesonden, welche aufgrund der Schwerkraft arbeiten und anderen Anwendungen, bei welchen poröse Strukturen eingesetzt werden. Dabei wird das Kondensat aufgrund von Kapillarkräften transportiert und der Wärmetransport ist nicht nur in der Vertikalen möglich.

Die Anwendung für Erdwärmesonden ist relativ neu und entsprechend sind wissenschaftliche Untersuchungen zu diesem Thema bisher schlicht nicht vorhanden. Erschwerend kommt dazu, dass der Prozess nicht „sichtbar“ ist. Was in der Erde passiert ist messtechnisch nur schwer zugänglich. Um sich ein Bild davon zu machen, welche Vorgänge im Innern der CO₂-EWS ablaufen, muss auf die Erfahrung in anderen Gebieten, wie z.B. Fallfilmverdampfung, zurückgegriffen werden. Zu Beginn dieser Studie stand deshalb eine Literaturrecherche im Vordergrund. Diese ermöglichte es abzuschätzen, welche physikalischen Vorgänge in der Sonde relevant sind und welche vernachlässigt werden können. Dies war zur Erstellung eines Simulationsmodells unerlässlich.

2.2 Stoffdaten von CO₂

Für das Simulationsmodell müssen Stoffdaten von CO₂ über einen gewissen Temperatur- bzw. Druckbereich bekannt sein. Für die Zustandsgleichung wurde eine viel zitierte Veröffentlichung von Span und Wagner [10] benutzt (Abb. 2-1). Der Prozess in der EWS spielt sich jedoch hauptsächlich auf der Siede- bzw. Taulinie ab, was die Berechnung vereinfacht. Die Gleichung für die Dichten ρ' bzw. ρ'' auf der Siede- bzw. Taulinie wurden ebenfalls dieser Veröffentlichung entnommen, ebenso die Dampfdruckkurve (Abb. 2-2). Die Quellen für die weiteren Stoffdaten sind in Tab. 2-1 zusammengefasst.

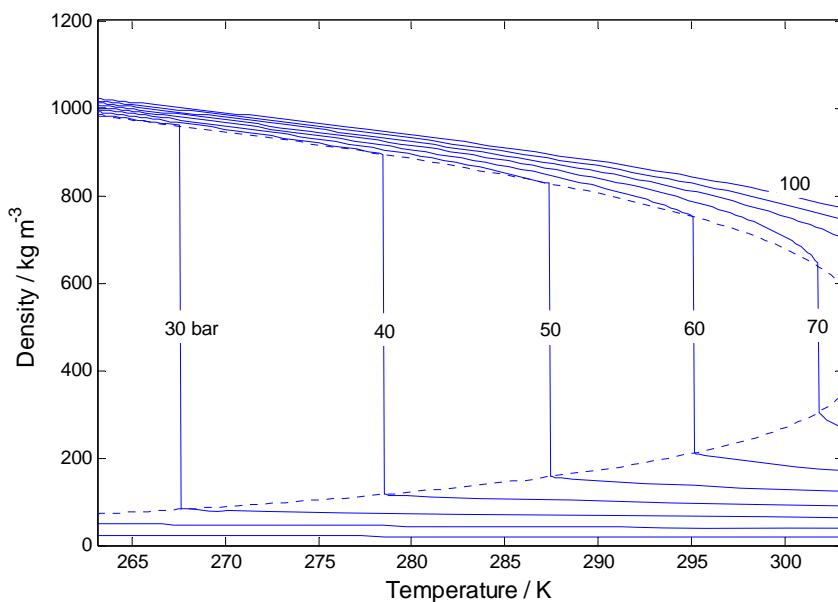


Abb. 2-1: Thermische Zustandsgleichung $\rho(p, T)$ von CO₂ nach Span und Wagner [10].

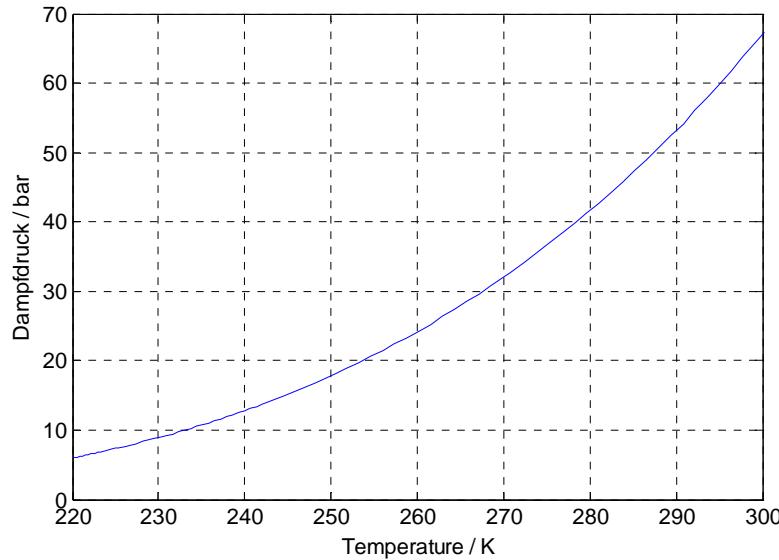


Abb. 2-2: Dampfdruckkurve $p_s(T)$ von CO_2 nach Span und Wagner [10].

Stoffeigenschaft	Symbol	Literaturquelle	Bemerkung
Dichte	ρ	Span und Wagner 1996 [10]	Iteration der Zustandsgleichung $p(\rho, T)$
Dichte Siedelinie	ρ'	Span und Wagner 1996 [10]	
Dichte Taulinie	ρ''	Span und Wagner 1996 [10]	
Spez. Enthalpie	h	Span und Wagner 1996 [10]	
Spez. Verdampfungsenthalpie	Δh_v	Span und Wagner 1996 [10]	Differenz $h(\rho'') - h(\rho')$
Dampfdruck	p_s	Span und Wagner 1996 [10]	
Wärmeleitfähigkeit	λ	Scalabrin et. al. 2006 [11]	
Dynamische Viskosität	η	Fenghour et. al. 1998 [12]	
Oberflächenspannung	σ	Dortmund Databank Software Rel. 1.1.0.3 (Pure Components)	Lineare Fitfunktion $\sigma(T)$ aus vorhandenen Daten

Tab. 2-1 Zusammenfassung der Quellen zu den verwendeten CO_2 -Stoffdatenfunktionen.

2.3 Strömungsverhältnisse in der Sonde

2.3.1 Ideale Fallfilmströmung

Bei einer CO₂-Erdwärmesonde wird jeweils selbstredend davon ausgegangen, dass sich an der Sondenwand ein geschlossener Film nach unten bewegt. Diese „ideale Fallfilmströmung“ ist aber nur unter gewissen Bedingungen möglich. Dieser Bereich ist einerseits begrenzt durch die sogenannte Staugrenze. Wenn die der Flüssigkeitsströmung entgegen gesetzte Gasströmung eine bestimmte Geschwindigkeit überschreitet, kommt es zu einer Richtungsumkehr im Flüssigkeitsfilm und er kann nicht mehr ungehindert nach unten fliessen. Wenn andererseits der umfangspezifische Flüssigkeitsmassenstrom einen bestimmten Wert unterschreitet, kann nicht mehr die gesamte Oberfläche der Sonde benetzt werden und es kommt zu einem Aufbruch des geschlossenen Films und zur sogenannten Rinnensalströmung. Dies wird als Benetzungsgrenze bezeichnet.

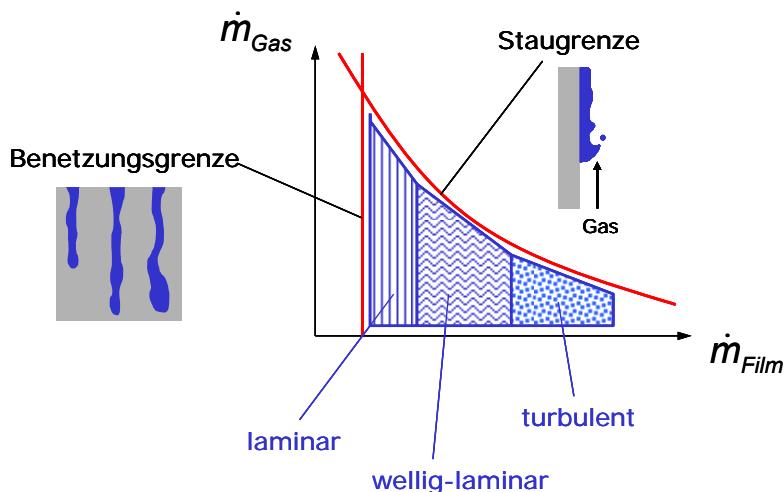


Abb. 2-3: Qualitative Darstellung verschiedener Strömungsbereiche und Grenzen des idealen Fallfilms.

Die ideale Fallfilmströmung bewegt sich innerhalb der oben genannten Grenzen, wobei sich innerhalb dieser Grenzen drei verschiedene Strömungsbereiche unterscheiden lassen. Für die Abgrenzung zwischen den Bereichen wird die Film-Reynoldszahl Re_F eingeführt:

$$Re_F = \frac{4 \cdot \dot{m}_F}{\pi \cdot D \cdot \eta_F} \quad (1)$$

Dabei bezeichnet \dot{m}_F den Flüssigkeits- bzw. Filmmassenstrom, D den Rohrdurchmesser und η_F die Viskosität des Films. Index F bezeichnet im Folgenden jeweils die Flüssigphase. Gemäß [13] liegen die Grenzen zwischen den Bereichen wie folgt:

Laminar	$Re_F < 4-25$
Wellig-laminar	$4-25 < Re_F < 1000-2000$
Turbulent	$Re_F > 1000-2000$

Die Unterscheidung zwischen diesen Bereichen ist für die Berechnung des Wärmeübergangskoeffizienten sehr wichtig (Kap. 2.4). Weitere wichtige dimensionslose Kennzahlen, welche in diesem Kapitel verwendet werden sind Prandtl-Zahl Pr sowie die Kapitza-Zahl Ka :

$$Pr = \frac{c_p \cdot \eta_F}{\lambda_F} \quad (2)$$

$$Ka = \frac{\eta_F^4 \cdot g}{\rho_F \cdot \sigma^3} \quad (3)$$

ρ	Dichte
c_p	Spezifische Wärmekapazität
λ	Wärmeleitfähigkeit
σ	Oberflächenspannung

Der Übergang vom laminaren zum wellig-laminaren Bereich kann aufgrund von halbempirischen Modellen [14, 15] genauer quantifiziert werden:

$$Re_{krit} = 2.43 \cdot (Ka)^{-(1/11)} \quad (4)$$

Die Grenze zum turbulenten Bereich errechnet sich aus:

$$Re_{krit} = 5800 \cdot (\Pr)^{-1.06} \quad (5)$$

Diese Kriterien wurden auch im Simulationsmodell verwendet.

2.3.2 Staugrenzenkorrelationen

Die Stau- bzw. Flutgrenze hat ihren Ursprung in der Grenzfläche zwischen Flüssigkeitsströmung und entgegengesetzter Gasströmung. Bei hoher relativer Geschwindigkeit zwischen den beiden Phasen, wird die Grenzfläche destabilisiert und es treten Wellen auf. Wenn die Schubspannung an der Grenzfläche genügend hoch ist, um die Oberflächenspannung der Flüssigkeit zu überwinden, kommt es zur Tropfenbildung, zum sogenannten „Entrainment“. Dies ist ein erstes Zeichen für die Destabilisierung des Flüssigkeitsfilms, welche zu einer Richtungsumkehr in der Filmströmung und schlussendlich zu einem totalen Rückstau des Flüssigkeitsfilms führen kann. Die Staugrenze wird im Englischen auch als „Entrainment Limit“ oder „Flooding Limit“ bezeichnet [16].

Es gibt zahlreiche Untersuchungen, welche das Phänomen der Staugrenze unter verschiedenen Bedingungen und mit verschiedenen Stoffsystmen untersucht haben. Ebenso wurden verschiedene halb-empirischen Korrelationen zur Berechnung des Flutpunktes erarbeitet. Die am häufigsten verwendete Gegenstrom-Beziehung ist diejenige von Wallis [17]. Sie beruht auf dem Gleichgewicht zwischen Trägheitskräften und hydrostatischen Kräften:

$$\sqrt{j_G^*} + \sqrt{j_F^*} = c_w \quad (6)$$

Dabei sind die dimensionslosen Geschwindigkeiten j_G^* bzw. j_F^* definiert als:

$$j_G^* = \sqrt{\frac{\rho_G \cdot j_G^2}{g \cdot D_H \cdot (\rho_F - \rho_G)}} \quad \text{bzw.} \quad j_F^* = \sqrt{\frac{\rho_F \cdot j_F^2}{g \cdot D_H \cdot (\rho_F - \rho_G)}} \quad (7)$$

j_G bzw. j_F bezeichnen dabei die Leerrohrgeschwindigkeiten, d.h. sie sind auf den gesamten Rohrquerschnitt bezogen. Die Konstante c_w muss empirisch bestimmt werden. D_H bezeichnet den hydraulischen Durchmesser des Strömungsquerschnitts.

Eine weitere oft verwendete Beziehung ist diejenige von Kutateladze [18]. Sie berücksichtigt zusätzlich die Oberflächenspannung σ :

$$\sqrt{K_G} + \sqrt{K_F} = c_K = \sqrt{3.2} \quad (8)$$

mit

$$K_G = \frac{\sqrt{\rho_G} \cdot j_G}{g \cdot \sigma \cdot (\rho_F - \rho_G)^{1/4}} \quad \text{bzw.} \quad K_F = \frac{\sqrt{\rho_F} \cdot j_F}{g \cdot \sigma \cdot (\rho_F - \rho_G)^{1/4}} \quad (9)$$

Diese Beziehung wurde durch Tien und Chung [16] weiterentwickelt, indem sie die Konstante c_K abhängig machten von der Bond-Zahl Bo , welche als dimensionsloser Rohrdurchmesser bzw. Strömungspassage interpretiert werden kann:

$$c_K = \sqrt{3.2} \cdot \tanh(0.5 \cdot Bo^{1/4}) \quad (10)$$

$$Bo = D_H \sqrt{\frac{g \cdot (\rho_F - \rho_G)}{\sigma}} \quad (11)$$

Mit steigendem charakteristischen Durchmesser D_H bzw. steigender Bond-Zahl strebt c_K gegen $\sqrt{3.2}$ und die Flutgrenze wird unabhängig vom Durchmesser. Durch Einbringung eines Innenrohres verengt sich die Strömungspassage. Daher wird für D_H die Differenz zwischen InnenØ des Aussenrohrs D und AussenØ des Innenrohrs d eingesetzt.

In Abb. 2-4 sind die verschiedenen Flutgrenzenkorrelationen für CO₂ am Beispiel eines Rohrs mit 32 mm Innendurchmesser aufgetragen (kein Innenrohr). Allen ist gemeinsam, dass bei Erhöhung der Geschwindigkeit einer Phase die kritische Geschwindigkeit für die andere Phase sinkt. Beim konventionellen CO₂-Wärmerohr ist es jedoch so, dass die Geschwindigkeiten nicht unabhängig voneinander variierbar sind, sondern im stationären Zustand der Massenstrom von Gasphase (nach oben) und Flüssigphase (nach unten) gleich sein müssen. Daher ist die Gasleerrohrgeschwindigkeit j_G über das Dichteverhältnis von der Flüssigkeitsleerrohrgeschwindigkeit j_F abhängig. Die möglichen Zustände (ohne Rücksicht auf die Staugrenze) bewegen sich entlang der eingezeichneten Gerade. Der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Staugrenzenkurve ergibt die maximal zulässigen Geschwindigkeiten.

Im Vergleich der verschiedenen Korrelationen erweist sich die Tien-Beziehung als die konservativste. Für weitere Abschätzungen, welche vor allem der Auslegung des Sondendurchmessers dienen, wurde deshalb im Folgenden diese Korrelation verwendet.

Wenn angenommen wird, dass der am oberen Rohrende aufgetragene Film kontinuierlich verdampft, so ist der kritischste Punkt ganz oben, da dort die Geschwindigkeiten von Gas- und Flüssigkeit am höchsten sind. Bei gegebenem Rohrdurchmesser kann aus der maximal zulässigen Geschwindigkeit der maximal zulässige Massenstrom und über die spezifische Verdampfungsenthalpie auf die maximal zulässige, entziehbare Wärmeleistung geschlossen werden. Abb. 2-5 zeigt diesen Zusammenhang für verschiedene Stoffe, da es theoretisch denkbar wäre, auch andere Arbeitsfluide für eine pumpenlose Erdwärmesonde zu verwenden. Die Lage der Kurve ist massgeblich durch das Dichteverhältnis ρ_F/ρ_G , sowie durch die spezifische Verdampfungsenthalpie Δh_V bestimmt. So hat zum Beispiel Wasser ein sehr hohes Dichteverhältnis von ca. 250'000, während dieser Wert für CO₂ bei ca. 10 liegt. Für den Einsatz in einer Erdwärmesonde ist es vorteilhaft, wenn die Kurve möglichst hoch liegt, da für die Entnahme der gleichen Wärmeleistung kleinere Rohre verwendet werden können. Allerdings spielen auch andere Aspekte wie Umweltgefährdungspotenzial des Stoffes, Sicherheit und Druckniveau eine entscheidende Rolle.

Für die Dimensionierung des Rohrdurchmessers beim Bau einer Sonde muss die Staugrenzenbeziehung auf alle Fälle berücksichtigt werden, wobei zu erwähnen ist, dass es sich bei der hier verwendeten Beziehung nach Tien um eine sehr konservative Schätzung handelt.

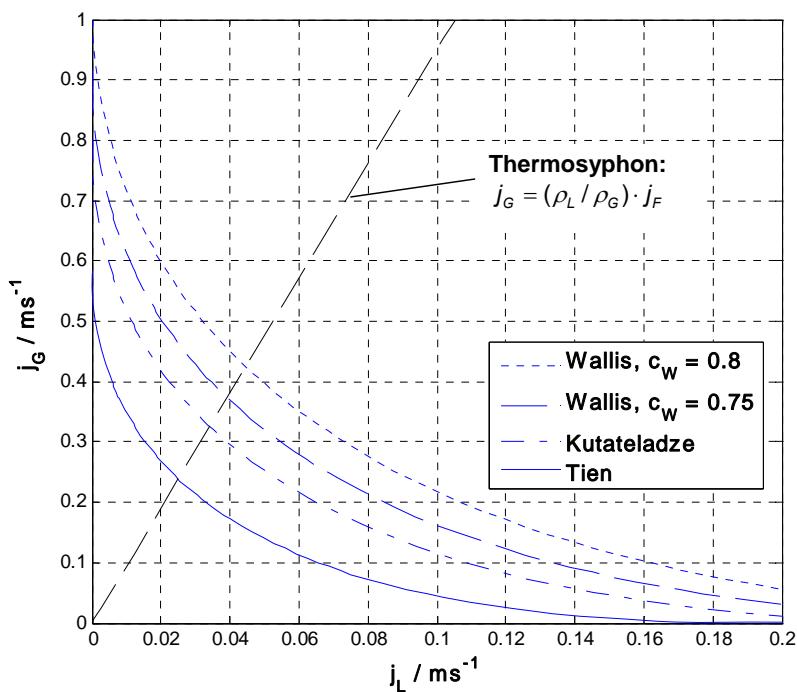


Abb. 2-4: Vergleich verschiedener Staugrenzenkorrelationen für CO_2 am Beispiel eines 32 mm Rohrs.

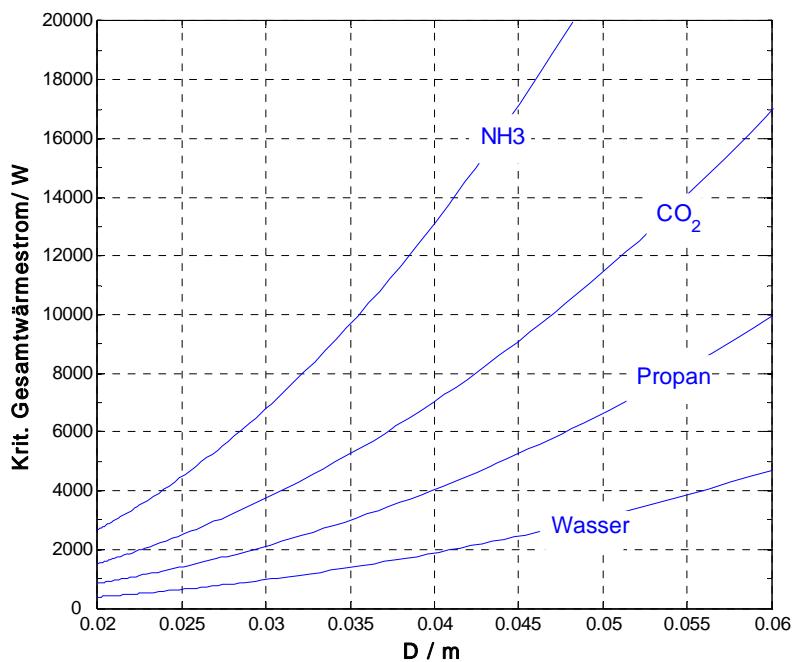


Abb. 2-5: Maximale entziehbare Wärmeleistung bei gegebenem Rohrdurchmesser, basierend auf der Staugrenzenkorrelation nach Tien [16], für verschiedene Stoffe. Stoffeigenschaften bei 0°C. Druckniveau: NH_3 4.3 bar, CO_2 35 bar, Propan 4.7 bar, Wasser 6 mbar.

2.3.3 Benetzungsgrenze

Wenn der umfangspezifische Flüssigkeitsmassenstrom einen bestimmten Wert unterschreitet, kann nicht mehr die gesamte Oberfläche der Sonde benetzt werden und es kommt zum Aufbruch der geschlossenen Filmströmung. Gemäss Schmuki und Laso [19] können mit steigendem Massenstrom folgende Strömungsformen beobachtet werden:

- Tropfenströmung
- Einzelne, gerade, laminare Rinnsale
- Mäandrierende Rinnsale
- Oszillierende Rinnsalströmung mit verzweigten Rinnsalen

Im Folgenden wird aus praktischen Gründen der übergeordnete Begriff Rinnsalströmung verwendet. Wenn in einer CO₂-EWS Rinnsalströmung auftritt bedeutet dies, dass sich die Wärmeübertragungsfläche von der gesamten Rohrfläche auf die Fläche der Rinnsale reduziert, dass sich also die Wärmeübertragung verschlechtert.

Die Vorhersage der minimalen Berieselungsdichte ist sehr komplex und kann nur mit halb-empirischen Modellen angegangen werden. Im Experiment ist es unter anderem relevant, ob der Filmmassenstrom von einem hohen Wert verringert wird, also von einem kohärenten Film ausgegangen wird oder umgekehrt. In der Praxis ist auch das Verteilerdesign von Bedeutung.

Die Benetzungsgrenze ist stark vom Benetzungswinkel θ und von der Oberflächenspannung σ abhängig. Vor allem der Benetzungswinkel ist für CO₂ sehr schwer zu bestimmen, zumal er noch vom Wandmaterial abhängt. Es wurden in der Literatur keine Angaben für das System CO_{2,F}/CO_{2,G}/Wandmaterial gefunden. Daher wurde die nach verschiedenen Modellen berechnete minimale Berieselungsdichte Γ_{min} in Abb. 2-6 über variablem Benetzungswinkel aufgetragen. Es wurden drei verschiedene Modelle verglichen:

Hartley und Murgatroyd [20]

$$\Gamma_{min} = \frac{\dot{m}}{\pi \cdot D} = 1.69 \left(\frac{\eta \cdot \rho}{g} \right)^{1/5} (\sigma (1 - \cos \theta))^{3/5} \quad (12)$$

El-Genk und Saber [21]:

$$\Gamma_{min} = \left(\frac{\eta \cdot \rho \cdot \sigma^3}{g} \right)^{1/5} (0.67 (1 - \cos \theta)^{0.623} + 0.26 (1 - \cos \theta)^{2.09}) \quad (13)$$

Morison et al. [22]:

$$\Gamma_{min} = 0.232 \cdot \eta \cdot \left(\frac{(1 - \cos \theta) \sigma \cdot \rho^{1/3}}{\eta^{4/3} \cdot g^{1/3}} \right)^{0.764} \quad (14)$$

Wenn von einem Wärmeentzug von 7.5 kW ausgegangen wird, ergibt dies einen CO₂-Massenstrom von 0.0325 kg/s, welcher am Sondenkopf auftritt. Dies liegt deutlich über den berechneten minimalen Werten. Wenn jedoch die Einspritzung z.B. auf 10 Stellen aufgeteilt wird, so wird der Massenstrom entsprechend dividiert und rückt in den „kritischen“ Bereich.

Zur Klärung der Frage, ob die Rinnensalströmung die Wärmeübertragungscharakteristik der CO₂-EWS massgeblich beeinflusst, soll im EWS-Modell eine Variante mit und ohne Rinnensalströmung berechnet und verglichen werden.

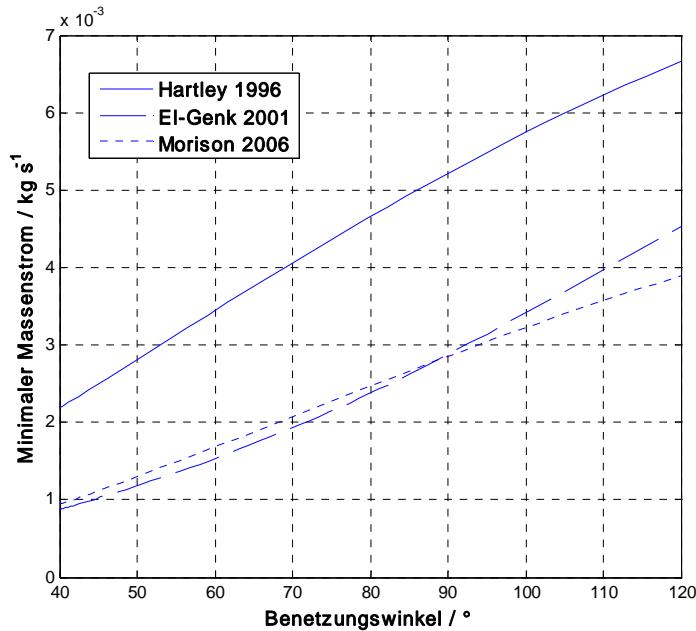


Abb. 2-6: *Minimaler Massenstrom für kohärente Filmströmung in Funktion des unbekannten Benetzungswinkels θ berechnet nach drei verschiedenen Modellen. Beispiel für Rohrdurchmesser D = 63 mm.*

2.4 Thermodynamik in der Sonde

2.4.1 Wärmeübergang im Film

Es soll an dieser Stelle zuerst davon ausgegangen werden, dass die Verdampfung des Films ausschliesslich an der Oberfläche stattfindet, d.h. ohne Blasenbildung. Für den Fall eines glatten, laminaren Films kann der Wärmeübergang mit Hilfe der Nusseltschen Wasserhauttheorie [23] beschrieben werden. Dies ist eine analytische Beschreibung des Wärmeübergangs in dünnen, laminar abfließenden Flüssigkeitsfilmen und beruht auf den Gleichungen für die Impuls- und Energieerhaltung. Dabei wird der konvektive Wärmetransport vernachlässigt und nur die Wärmeleitung normal zur Strömungsrichtung berücksichtigt.

Bei konstanter Temperaturdifferenz ΔT zwischen Wand und Filmoberfläche berechnet sich die Anfangsfilmdicke δ_0 aus:

$$\delta_0 = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot \dot{m}_F \cdot \eta_F}{D \cdot \pi \cdot g \cdot \rho_F^2}} \quad (15)$$

Neben Stoff- und Geometriedaten ist diese lediglich vom Filmmassenstrom \dot{m}_F abhängig. Der Verlauf der Filmdicke gegen unten (z-Richtung) kann ebenfalls berechnet werden:

$$\delta(z) = \sqrt[4]{\delta_0^4 - \frac{4 \cdot \eta_F \cdot \lambda_F \cdot \Delta T}{g \cdot \rho_F^2 \cdot \Delta h_v} \cdot z} \quad \text{mit } \Delta T = T_w - T_s \quad (16)$$

Daraus ist ersichtlich, dass die Abnahme der Filmdicke gegen unten durch den Wärmeübergang ($\lambda_F \cdot \Delta T$) bestimmt wird. Die Temperaturdifferenz ΔT über dem Film ergibt sich aus der Differenz zwischen der Wandtemperatur T_W und der Temperatur an der Oberfläche des Films, die bei der Siedetemperatur T_S liegt.

Unter den obigen Annahmen ergibt sich der Wärmeübergangskoeffizient α im laminaren Bereich:

$$\alpha = \frac{\dot{q}}{\Delta T} = \sqrt[3]{\frac{\rho_F^2 \cdot g \cdot \lambda_F^3 \cdot \pi \cdot D}{3 \cdot \eta_F \cdot \dot{m}_F}} \quad (17)$$

Wird der Massenstrom bzw. die Film-Reynoldszahl erhöht, treten an der Oberfläche Wellen auf. Der Wärmeübergangskoeffizient wird etwas erhöht, da die durchschnittliche Filmdicke abnimmt. Für den wellig-laminaren Bereich gilt [14]:

$$\alpha = 0.606 \cdot \sqrt[3]{\frac{\rho_F^2 \cdot g \cdot \lambda_F^3}{\eta_F^2}} \cdot \left(\frac{Re_F}{4} \right)^{-0.22} \quad (18)$$

Der Wärmeübergangskoeffizient im turbulenten Gebiet errechnet sich aus [14]:

$$\alpha = 3.8 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{\rho_F^2 \cdot g \cdot \lambda_F^3}{\eta_F^2} \right) \cdot (Re_F)^{0.4} \cdot (Pr_F)^{0.65} \quad (19)$$

Die Grenzen zwischen den Bereichen sind aufgrund von Gleichung (4) und (5) definiert. Der Verlauf von α ist in Abb. 2-7 direkt in Funktion des Filmmassenstroms \dot{m}_F aufgetragen. Der Übergang zwischen den Strömungsbereichen ist dabei gut ersichtlich. Im laminaren sowie im wellig-laminaren Gebiet sinkt α mit zunehmendem Massenstrom, da die Filmdicke mit erhöhtem Massenstrom zunimmt. Dies ändert sich bei Umschlag zu turbulenter Strömung, da der Wärmeübergang dort nicht mehr durch Wärmeleitung dominiert ist.

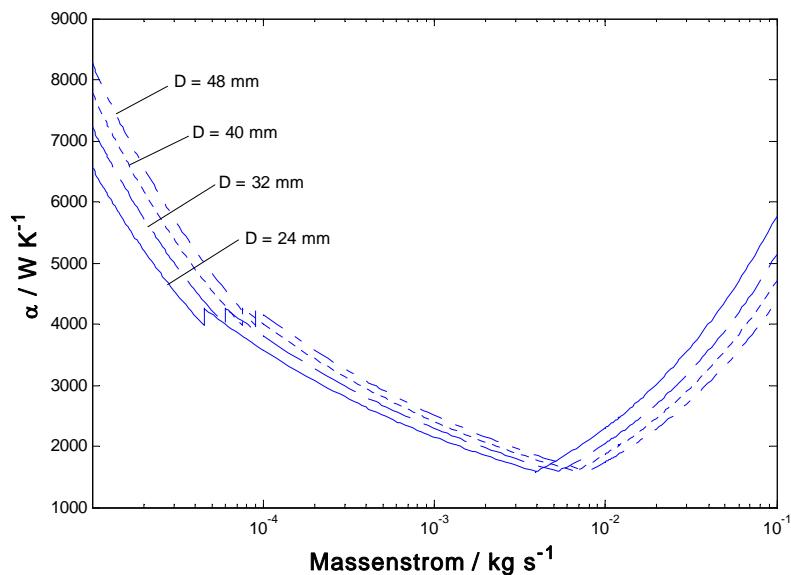


Abb. 2-7: Wärmeübergangskoeffizient α in Funktion des Filmmassenstroms in einem Rohr.

2.4.2 Einfluss von Blasennukleation

In den bisherigen Ausführungen wurde jeweils davon ausgegangen, dass die Flüssigkeit an der Oberfläche des Filmes verdampft. Bei hoher Wärmestromdichte kann es jedoch sein, dass an der beheizten Wand Blasen entstehen, welche den Film durchdringen. Gemäß Krupiczka [15] kann die totale Wärmestromdichte \dot{q} als Superposition aus einem konvektiven Teil \dot{q}_z und einem Teil \dot{q}_B , welcher für die Blasennukleation investiert wird, angesehen werden. Das Verhältnis der Gesamtnusseltzahl Nu zur konvektiven Nusseltzahl Nu_z beträgt eins, solange die Blasennukleation keinen Einfluss hat und steigt danach an. In Abb. 2-8 ist das Verhältnis Nu/Nu_z aufgetragen über dem Produkt von $\text{Boi} \cdot \text{Ka}^{1/11}$. Die Boiling Zahl Boi ist definiert als:

$$\text{Boi} = \frac{\dot{q} \cdot D \cdot \pi \cdot \delta}{\dot{m}_F \cdot \Delta h_v} \quad (20)$$

Die Kapitza-Zahl wurde bereits in Gleichung (3) definiert.

Um abzuschätzen, ob in der CO₂-EWS Blasennukleation allenfalls eine Rolle spielt, sollen zwei verschiedene Beispiele betrachtet werden: Im ersten Fall soll ein Rohr von 32 mm Innendurchmesser betrachtet werden, welches 2 kW Leistung entzieht und bei welchem auf 10 Höhenstufen eingespritzt wird ($N = 10$). Daraus ergibt sich ein Filmmassenstrom von anfänglich ca. 0.001 kg/s und gemäß Nusselt (Gl. (15)) eine Anfangsfilmdicke von $4 \cdot 10^{-5}$ m. Das Produkt $\text{Bo} \cdot \text{Ka}^{1/11}$ beträgt in diesem Fall ca. 10^6 . Im zweiten Fall ohne Mehrfacheinspritzung und bei einer Rohrweite von 63 mm und den entsprechend angepassten Werten für Filmmassenstrom und Filmdicke ergibt sich ein Produkt von $8 \cdot 10^{-8}$. Beides liegt gemäß Abb. 2-8 noch im Bereich, wo die Blasennukleation keine Rolle spielt.

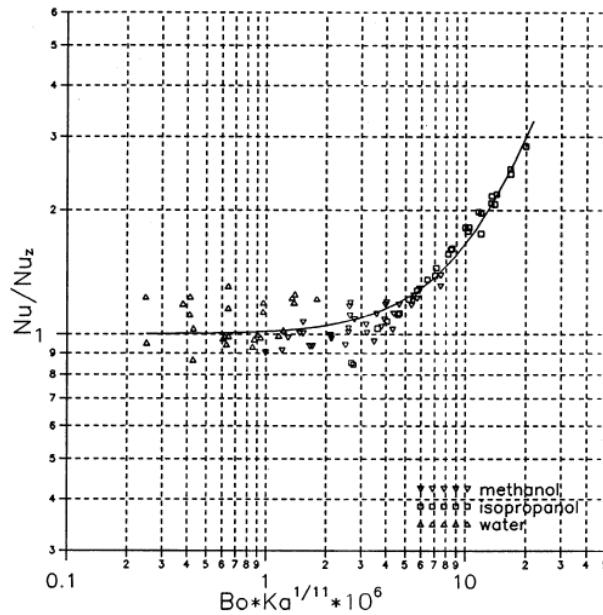


Abb. 2-8: Auftragung von Nu/Nu_z über dem dimensionslosen Produkt $\text{Boi} \cdot \text{Ka}^{1/11}$ gemäß Krupiczka et al.[15]. Solange das Verhältnis bei eins liegt spielt Blasennukleation keine Rolle.

2.4.3 Wärmeübergang im Pool

Die gängigen empirischen Modelle zur Berechnung der Wärmestromdichte sind entweder „Behältersieden“ oder „Sieden in einer Rohrströmung“. Ersteres bezieht sich auf Behälter mit horizontalen, ebenen Heizflächen oder horizontalen Rohrbündeln, was jedoch die Situation im Flüssigkeitspool einer Erdwärmesonde nicht widerspiegelt. Das Längen / Durchmesserverhältnis im Pool liegt in der Größenordnung von 100 und die Beheizung erfolgt an der senkrechten Wand. Die Situation entspricht eher dem Sieden in vertikalen Rohrströmungen bei niedrigen Geschwindigkeiten. Gemäss VDI-Wärmeatlas [24] kann der Wärmeübergangskoeffizient mit folgendem empirischem Ansatz berechnet werden.

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = C_F \cdot \left(\frac{\dot{q}}{\dot{q}_0} \right)^n \cdot F(p^*) \cdot F(d) \cdot F(W) \cdot F(\dot{m}, \dot{x}) \quad (21)$$

Darin werden die Flüssigkeitseigenschaften durch C_F , die Druckabhängigkeit mit $F(p^*)$ die Heizwandeigenschaften durch $F(W)$, die Rohrabmessungen in $F(d)$ und die Strömungseinflüsse durch $F(\dot{m}, \dot{x})$ berücksichtigt. Der Wärmeübergangskoeffizient α ist also abhängig von der Wärmestromdichte, wobei der Exponent n stoffspezifisch ist.

3 Modellierung der CO₂-Erdwärmesonde

3.1 Modellstruktur

Der Hauptnutzen, welcher aus der Modellbildung und Simulation resultieren soll, ist ein besseres Verständnis der physikalischen Vorgänge in der Sonde. Entsprechend liegt der Fokus auf diesem Teil. Trotzdem kann die EWS nicht alleine betrachtet werden, sondern die Wechselwirkung mit dem Erdreich muss berücksichtigt werden. Wird der Erde an einer bestimmten Stelle Wärme entzogen, kühlt sie sich ab und die treibende Temperaturdifferenz für den Wärmevertrag verringert sich. Es wird an dieser Stelle weniger flüssiges CO₂ verdampfen, die Filmverteilung in der EWS wird sich ändern usw. Es handelt sich um ein System mit starker negativer Rückkopplung.

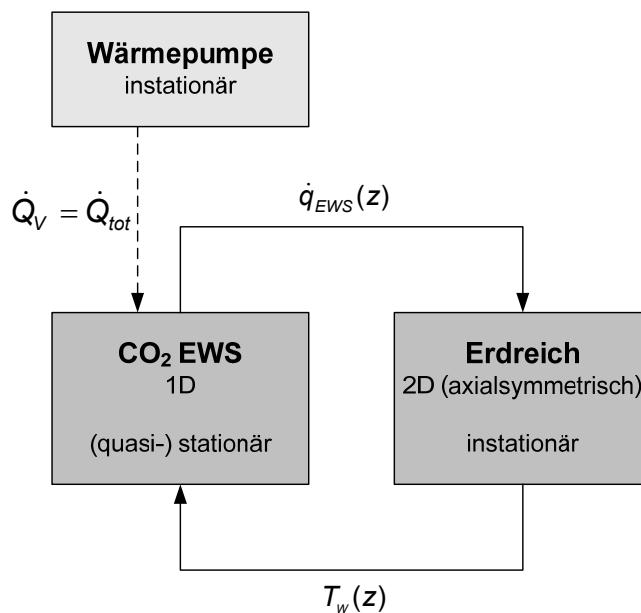


Abb. 3-1: Kopplung der verschiedenen Modellblöcke.

Das Gesamtmodell wird daher in zwei Hauptblöcke aufgeteilt. Einen EWS-Block und einen Erdreich-Block. Es wird dabei angenommen, dass die zeitlichen Vorgänge in der EWS viel schneller ablaufen als im Erdreich, d.h. in der EWS wird nur mit stationären Zuständen gerechnet. Zudem werden die Zustände in der EWS nur in Funktion der Höhe z , also eindimensional betrachtet. Das axialsymmetrische, zweidimensionale Modell der Erde beschreibt die instationäre Wärmeleitung im Erdreich.

Output aus dem Erdreich-Block ist die Wandtemperaturverteilung $T_w(z)$, welche als Input in das EWS-Modell dient. Das EWS-Modell liefert wiederum die tiefenabhängige Wärmestromdichte $\dot{q}_{EWS}(z)$, welche der Erde entzogen wird. Jeder Zeitschritt im Erdmodell beinhaltet somit ein Update von $\dot{q}_{EWS}(z)$.

Optional könnte auch eine Verbraucherkurve mit dem Modell berechnet werden. In einem ersten Schritt wird jedoch mit einer Blockbelastung, d.h. einer konstanten Verdampferleistung der Wärmepumpe \dot{Q}_V gerechnet. Diese entspricht im stationären Zustand der dem Erdreich total entzogenen Leistung \dot{Q}_{tot} .

Nach Evaluation verschiedener Möglichkeiten wurde beschlossen, das gesamte Modell in MATLAB zu programmieren. Ausschlaggebend dafür war insbesondere die Tatsache, dass dabei höchstmögliche Flexibilität und Zugänglichkeit besteht.

3.2 Modellblock CO₂-Erdwärmesonde

Ziel dieses Modellblocks ist es, das Verhalten des Arbeitsfluids CO₂ in der EWS bei vorgegebenem Wandtemperaturprofil $T_w(z)$ zu beschreiben, um schliesslich die lokale Wärmestromdichte $\dot{q}_{EWS}(z)$, welche der Erde entzogen wird, zu berechnen. Es soll auch die Möglichkeit der Mehrfacheinspritzung berücksichtigt werden. Dazu wird wie in Abb. 3-2 dargestellt die Bilanz über einem Filmentelement der Höhe dz betrachtet.

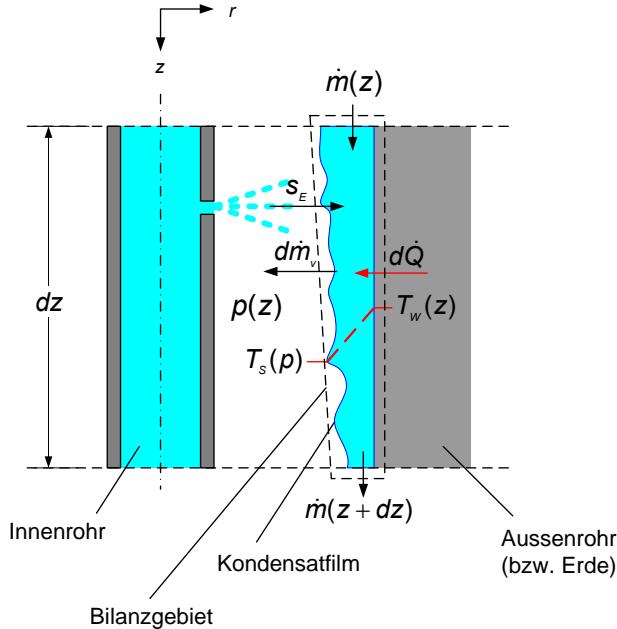


Abb. 3-2: Massenbilanz über ein Element des Kondensatfilms.

Die Veränderung des Filmmassenstroms $d\dot{m}$ über der Länge dz ergibt sich aus der Differenz zwischen dem Einspritzterm s_E und der verdampften Menge $d\dot{m}_v$, wobei diese auch negativ sein kann (Kondensation):

$$d\dot{m} = \dot{m}(z + dz) - \dot{m}(z) = -d\dot{m}_v + s_E \quad (22)$$

Wird der Wärmeübergang in z -Richtung vernachlässigt, so berechnet sich $d\dot{m}_v$ aus dem vom Erdreich entzogenen Wärmestrom dQ und der spezifischen Verdampfungsenthalpie Δh_v bzw. aus der spezifischen Wärmestromdichte $\dot{q}(z)$ und Geometriefaktoren, wobei D den Innendurchmesser des Aussenrohrs bezeichnet:

$$d\dot{m}_v = \frac{dQ}{\Delta h_v} = \frac{D \cdot \pi \cdot dz}{\Delta h_v} \cdot \dot{q}(z) \quad (23)$$

Zur Berechnung von $\dot{q}(z)$ wird der halbempirische Ansatz mit dem Wärmeübergangskoeffizienten α zu Hilfe genommen. α ist abhängig von der Filmdicke und der Strömungsform und somit von \dot{m} (siehe Abschnitt 2.4.1). Die Temperaturdifferenz über dem Film ergibt sich aus der Differenz zwischen der Wandtemperatur T_w und der Siedetemperatur T_s , welche an der Filmoberfläche vorherrscht und abhängig ist vom lokalen Druck $p(z)$ in der Sonde an der Stelle z :

$$\dot{q}_{EWS}(z) = \alpha(\dot{m}) \cdot \Delta T = \alpha(\dot{m}) \cdot [T_w - T_s(p(z))] \quad (24)$$

Zusammengefasst ergibt sich daraus die zu lösende Differentialgleichung:

$$\frac{d\dot{m}}{dz} = \frac{D \cdot \pi}{\Delta h_v} \cdot \alpha(\dot{m}) \cdot [T_w - T_s(p(z))] + s_E \quad (25)$$

Die Diskretisierung erfolgt mit dem Index i in z-Richtung nach dem Schema:

$$\dot{m}(i+1) = \dot{m}(i) - \Delta\dot{m}(i) \quad (26)$$

mit

$$\Delta\dot{m}(i) = \frac{D \cdot \pi \cdot \Delta z}{\Delta h_v} \cdot \alpha(\dot{m}(i)) \cdot [T_w(i) - T_s(p(i))] \quad (27)$$

Dabei ist die Wandtemperatur $T_w(i)$ die Kopplungsvariable zum Erdmodell. Der Wärmeübergangskoeffizient α ist abhängig vom Massenstrom $\dot{m}(i)$. Dieser beinhaltet die Information über die Strömungsform und kann, wie in Abschnitt 2.4.1 diskutiert, aus verschiedenen bekannten Korrelationen berechnet werden (Formeln (17)–(19)). Die Siedetemperatur T_s ergibt sich aus der Dampfdruckkurve. Es muss jedoch zuerst der Druck in der Sonde bestimmt werden. Ausgehend vom Referenzdruck am Sondenkopf p_0 nimmt der Druck mit steigender Tiefe durch die Gassäule stetig zu. Der Druckverlust durch die Beschleunigung des Gases gegen oben wird vernachlässigt. Bei bekanntem Druck am Sondenkopf p_0 wird der Druckanstieg gegen unten analog zur barometrischen Höhenformel berechnet:

$$p(z) = p_0 \cdot \exp\left(\frac{g \cdot M_{CO_2}}{R \cdot T_0} \cdot z\right) \quad (28)$$

Mit der universellen Gaskonstante R , der Molmasse M_{CO_2} und der Ausgangstemperatur T_0 am Sondenkopf.

Es stellt sich nun die Frage, von welchem Sondendruck p_0 dabei auszugehen ist. Dabei wurde die folgende Bedingung zu Hilfe genommen, die in Abb. 3-3 illustriert ist. Im stationären Fall gilt:

$$\dot{Q}_{tot} = \dot{Q}_{Film}(p_0) + \dot{Q}_{Pool}(p_0) = \dot{Q}_V \quad (29)$$

Es wird davon ausgegangen, dass sich bei ausreichender Füllmenge am Sondenfuss ein Pool mit flüssigem CO₂ bildet. Auch in diesem Pool wird eine kleine Menge CO₂ verdampfen. Die Summe \dot{Q}_{tot} des Beitrags aus dem Pool \dot{Q}_{Pool} und aus der Filmverdampfung \dot{Q}_{Film} müssen im stationären Zustand der vorgegebenen, Verdampferleistung der Wärmepumpe \dot{Q}_V entsprechen. Beide Beiträge sind massgeblich vom Druck $p(z)$ abhängig, indem dieser die Siedetemperatur und damit die treibende Temperaturdifferenz über dem Film in der Sonde bestimmt. Der Druck wird sich im stationären Zustand so einstellen, dass obige Bedingung erfüllt ist.

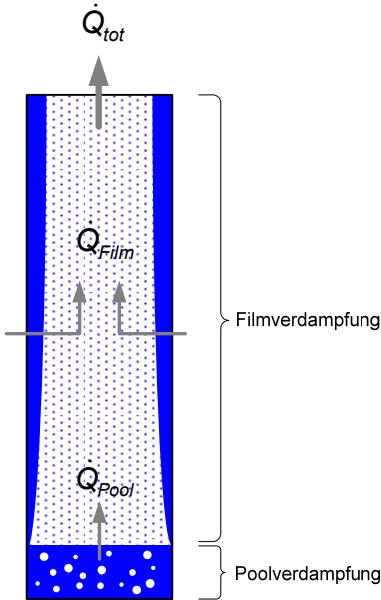


Abb. 3-3: Verschiedene Verdampfungsbereiche im CO₂-Thermosiphon (stark gestaucht dargestellt).

Obwohl der Beitrag des Pools keinen bedeutenden Anteil am Gesamtwärmestrom ausmacht, muss dieser Teil berücksichtigt werden, um einen eindeutigen Druckzustand in der Sonde berechnen zu können (siehe Abb. 3-5). Der Wärmeübergangskoeffizient α im Poolbereich wird nach (21) berechnet.

Zudem muss die Poolhöhe bekannt sein. Sie ist abhängig von der Füllmenge CO₂ und dem Druck in der Sonde. Je tiefer der Druck im System (mit konstantem Volumen und konstanter Füllmenge), desto mehr verschiebt sich der Anteil gegen die Flüssigphase und der Pool wird höher. Die Füllmenge richtet sich nach dem maximalen Auslegungsdruck. Bei diesem maximalen Druck existiert kein Pool (Poolhöhe = 0), d.h. es ist nur noch der Flüssigkeitsfilm an der Rohrwand vorhanden. Die Gesamtmenge an CO₂ m setzt sich an diesem Punkt zusammen aus der flüssigen Menge CO₂ im Film m_F und der Menge in der Gasphase m_G .

$$\begin{aligned} m &= m_F + m_G \\ m_F &= V_F \cdot \rho'(p) = \pi D L \delta \cdot \rho'(p) \\ m_G &= V_G \cdot \rho''(p) = \frac{\pi}{4} D^2 L \cdot \rho''(p) \end{aligned} \quad (30)$$

Vereinfachend wird zur Berechnung der Poolhöhe h angenommen, dass sich diese aus der Differenz zwischen der Füllmenge bei maximalem Druck und der Füllmenge bei aktuellem Druck berechnen lässt. Das durch den Pool verdrängte Gasvolumen wird also nicht berücksichtigt. Es ergibt sich somit:

$$h(p) = \frac{\Delta m}{\rho'(p) \cdot A} = \frac{4 \cdot (m(p_{\max}) - m(p))}{\rho'(p) \cdot \pi \cdot D^2} \quad (31)$$

- V_F Volumen des Flüssigkeitsfilm
- V_G Volumen Gasphase
- ρ' Dichte Flüssigkeit auf der Siedelinie
- ρ'' Dichte Gas auf der Taulinie
- δ Durchschnittliche Filmdicke

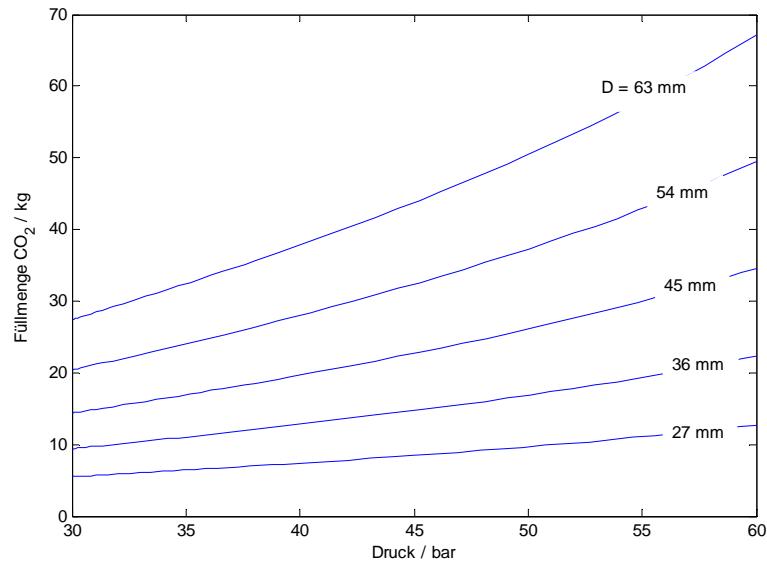


Abb. 3-4: Füllmenge CO_2 pro 100 m Sonde gemäss Formel (30) bei unterschiedlichem Rohrinnendurchmesser D .

Der Druckanstieg gegen unten im Pool verläuft steiler als in der Gasphase gemäss:

$$p(z) = p(z_{\text{Pool}}) + \rho \cdot g \cdot (z - z_{\text{Pool}}) \quad (32)$$

Das Modell der Poolberechnung ist als Abschätzung zu betrachten. Spätere Berechnungen haben gezeigt, dass der Anteil des Pools an der gesamten Wärmeleistung in der Größenordnung von 5% liegt. Dies hat auf das Gesamtergebnis wenig Einfluss, ist aber wie bereits dargelegt wichtig, um in der Sonde einen eindeutigen Druckzustand berechnen zu können. Abb. 3-5 illustriert diesen Sachverhalt. Im Modell wird eine Verdampferleistung vorgegeben. Diese bestimmt, wie viel Kondensat oben zugegeben wird. Das Modell berechnet nun bei einem vorgegebenen Druck, welche Menge im Sondenraum netto verdampft (rote Kurve). Im stationären Zustand muss dies gleich der vorgegebenen Verdampferleistung sein. Der zugehörige Betriebsdruck kann aus der ausgezogenen, roten Kurve herausgelesen werden.

Der konstante Verlauf der Kurve des Anteils der Filmverdampfung kommt daher, dass bei zu tiefem Druck der Film nicht bis zum Sondenende hinunter reicht, sondern bereits vorher alles verdampft ist. Mehr als oben zugeführt wird kann aufgrund der Massenbilanz im stationären Zustand nicht verdampfen. Würde also nur die Filmverdampfung berücksichtigt, ergäbe sich kein eindeutiger Druckzustand. Wird hingegen der Anteil des Pools dazugezählt, welcher mit steigendem Druck kontinuierlich sinkt, ist der zu der vorgegebenen Verdampferleistung zugehörige Druck eindeutig. Dies hat auch einen reellen Hintergrund, denn auf diese Weise reguliert sich das System selbst, wenn davon ausgegangen wird, dass die Wärmepumpe die vorgegebene Verdampferleistung erreicht. Ist der Druck im System zu tief, verdampft mehr als kondensieren kann. Der Druck in der Gasphase und somit die Siedetemperatur steigt bis sich ein stationärer Zustand eingestellt hat. Dasselbe gilt umgekehrt bei zu hohem Druck.

Das Diagramm zeigt auch, dass schon eine geringe Druckvariation grosse Auswirkungen auf das Verdampfungsverhalten zeigt.

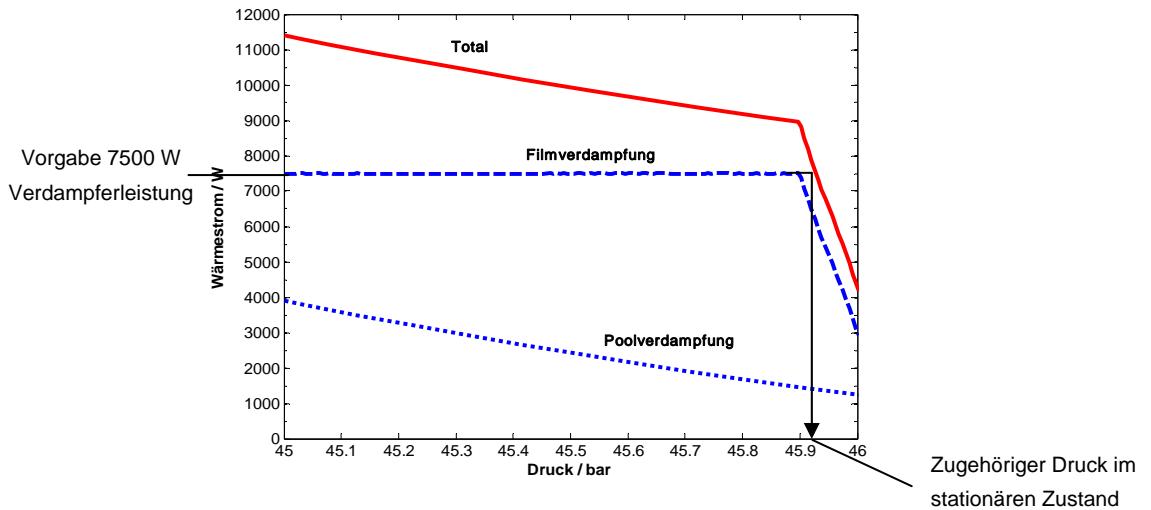


Abb. 3-5: Anteil von Film- bzw. Poolverdampfung an der totalen Wärmeleistung, welche der Erde entzogen wird bei vorgegebener Verdampferleistung der Wärmepumpe von 7500 W und variablem Druck p_0 .

Im Simulationsmodell wird der Druck im stationären Zustand iterativ aus der Summenfunktion (rote Kurve) ermittelt. Der Druck wird im Modell solange variiert, bis die total entzogene Wärmemenge der vorgegebenen Verdampferleistung der Wärmepumpe entspricht. Dazu wurde die sogenannte Sekantenmethode verwendet. Diese ist in Anhang A1.1 detailliert erklärt.

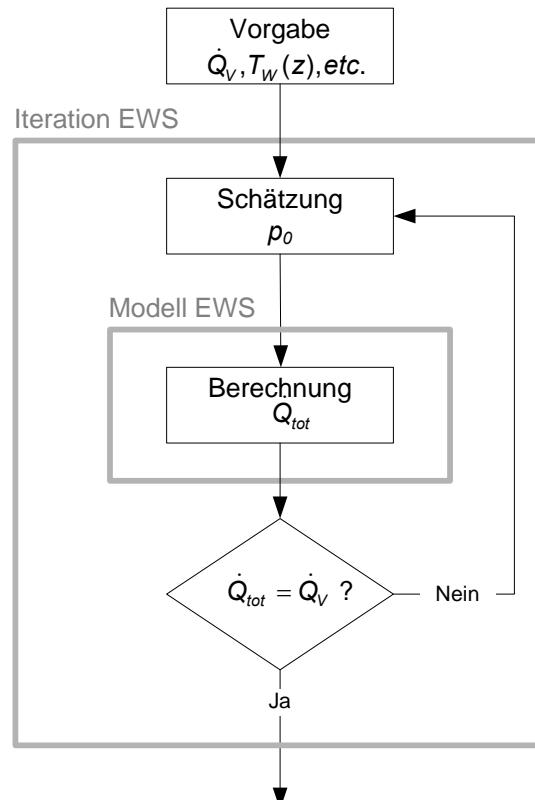


Abb. 3-6: Hierarchieschema zur Ermittlung des stationären Zustands in der Erdwärmesonde.

Die Hierarchie zur Berechnung des Druckzustandes in der Sonde im stationären Zustand ist in Abb. 3-6 dargestellt. Das EWS-Modell muss mehrere Male durchgerechnet werden, bis die Bedingung erfüllt ist. Die Iterationsfunktion ist ihr übergeordnet. Genau genommen entspricht also der in Abb. 3-1 dargestellte Modellblock „CO₂-EWS“ der Iterationsfunktion. Erst wenn der stationäre Sondendruck ermittelt ist, kann auch die Wärmestromdichteverteilung $\dot{q}_{EWS}(z)$, welche an das Erdmodell übergeben wird, berechnet werden.

3.3 Modell des Erdreichs

Zur Beschreibung der Wärmeleitung in der Erde muss die instationäre Wärmeleitungsgleichung gelöst werden (2-Dimensional, axialsymmetrisch):

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (33)$$

Mit der Temperaturleitzahl

$$a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p} \quad (34)$$

Dies wird numerisch mit der Finiten Differenzen Methode (FDM), mittels Crank-Nicolson Verfahren gelöst. Dies ist ein implizites Verfahren 2. Ordnung und hat den Vorteil, dass es keine Einschränkungen bezüglich der Grösse der gewählten Zeitschritte Δt gibt [25]. Jedoch zeigte sich später bei der Kopplung der Modelle, dass die Zeitschritte genügend klein gewählt werden müssen, damit das System nicht überschwingt. Um die Lösung zu finden, muss ein algebraisches Gleichungssystem gelöst werden. Der aufwändige Formalismus ist in Anhang A1.2 aufgeführt.

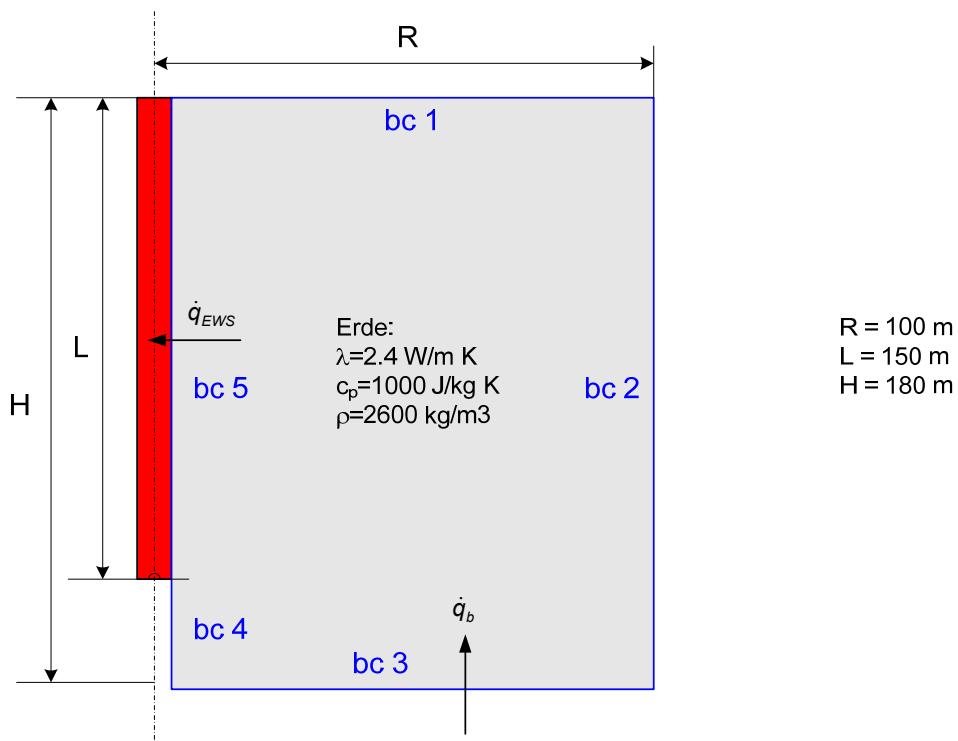


Abb. 3-7: Dimensionen und Randbedingungen des Erdmodells.

Die Temperaturgradienten nehmen zur Sonde hin stark zu. Deshalb wurde in r-Richtung ein linear skaliertes Netz mit wachsenden Gitterabständen von der Achse weg gewählt mit dem Skalierungsfaktor γ :

$$\Delta r_{i+1} = \gamma \cdot \Delta r_i \quad (35)$$

In z-Richtung ist der Gitterabstand Δz konstant.

Die Randbedingungen sowie die Modelldimensionen und Eigenschaften des Erdreichs sind in Abb. 3-7 illustriert. Das Erdstück hat einen Radius von 100 m und eine Tiefe von 180 m, bei einer 150 m tief reichenden EWS. Die im Vergleich zur Erde abweichenden Stoffeigenschaften von Hinterfüllung und Rohrwand werden vernachlässigt.

Der obere Rand (bc1) wird als isoliert angenommen, die Wärmestromdichte senkrecht zu dieser Linie ist gleich Null. Zuerst wurde die Temperatur auf dieser Linie bei 10°C festgehalten. Dadurch blieb im Schnittpunkt zur Erdwärmesonde hin jedoch die Temperaturdifferenz zum Sondeninnern immer sehr hoch, was zur Folge hatte, dass das Modell in der Sonde an dieser Stelle viel zu hohe Wärmeströme berechnete, da der regulierende Effekt der Erdabkühlung im Modell nicht spielte. Durch die Isolationsbedingung konnte dies vermieden werden.

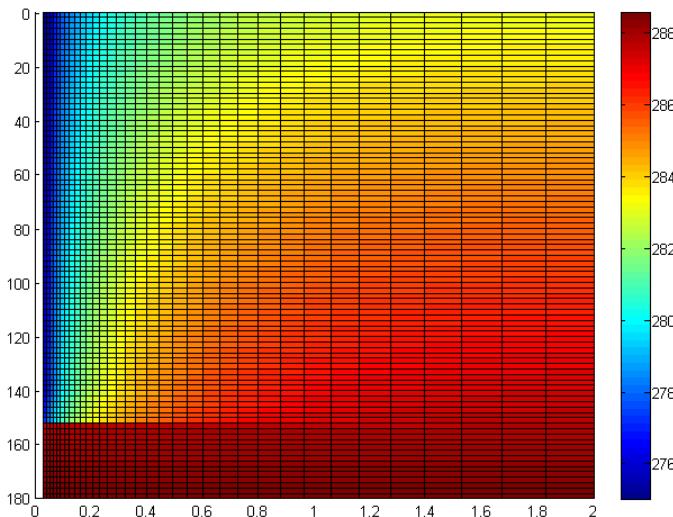


Abb. 3-8: Bsp. Temperaturverteilung im Erdreich (Darstellung stark gestaucht).

Am äusseren Rand des Modells (bc2) wird davon ausgegangen, dass das Temperaturprofil der Erde ungestört ist. Die Temperatur erhöht sich ausgehend von der Ausgangstemperatur $T_0 = 10^\circ\text{C}$ mit einem Gradient von 0.03 K/m gegen unten. Dies ist gleichzeitig auch die Anfangsbedingung für das ganze Gebiet.

$$T_E = T_0 + 0.03[\text{K}/\text{m}] \cdot z \quad (36)$$

Am unteren Rand (bc3) fliesst ständig ein konstanter Basiswärmestrom \dot{q}_B von 0.08 W/m² vom Erdinnern nach.

Für die Randbedingung bc4 wird vereinfachend angenommen, dass die Linie die axialsymmetrische Achse darstellt

Gegen die Erdwärmesonde hin (bc5) ist die spezifische Wärmestromdichte $\dot{q}_{EWS}(z)$ vorgegeben. Diese ändert sich jedoch und muss in jedem Zeitschritt aktualisiert werden. Dies ist der (zeit-) aufwändigste Teil im Rechenverfahren, denn in jedem Zeitschritt muss die Iterationsschlaufe zur Bestimmung des Druckzustandes in der EWS, wie im vorangegangenen Abschnitt diskutiert, durchlaufen werden. Das heisst, dass das Erdwärmesondenmodell pro Zeitschritt in der Regel 20 bis 40 Mal durchgerechnet werden muss.

3.4 Kopplung der Modelle

Die Kopplung zwischen den Modellen ist in Abb. 3-9 schematisch dargestellt. Zu einem beliebigen Zeitpunkt t ist die Temperaturverteilung $T(t,r,z)$ in der Erde gegeben. Um die Temperaturverteilung $T(t+\Delta t, r, z)$ nach dem nächsten Zeitschritt Δt zu berechnen, wird für die Aktualisierung der Randbedingung bc5 das EWS-Modell aufgerufen. Dieses benötigt als Eingabe die Temperaturverteilung an der Sondenwand $T_w(z)$. Durch Iteration wird wie besprochen der stationäre Zustand im Sondeninnern berechnet. Die spezifische, lokale Wärmestromdichte $\dot{q}_{EWS}(z)$, d.h. die Wärme, welche der Erde in diesem Zustand entzogen wird, wird danach ermittelt. Danach kann aus der entsprechend aktualisierten Randbedingung bc5 die neue Temperaturverteilung in der Erde berechnet werden. Auf Programmebene ist also das Erdmodell dem EWS-Modell übergeordnet, da das zweite innerhalb des ersten aufgerufen wird.

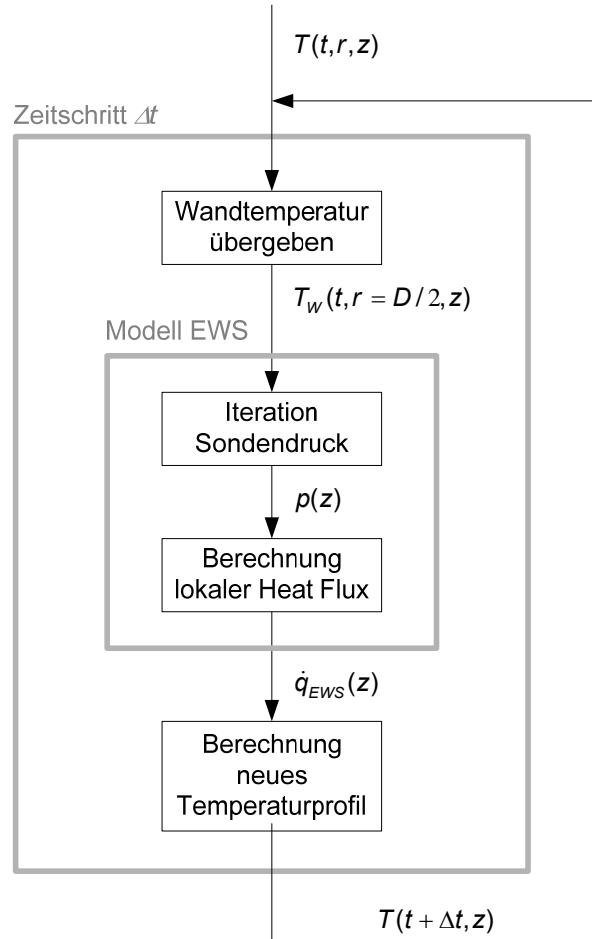


Abb. 3-9: Rechenschema zur Kopplung von Erdmodell und EWS-Modell.

Bezüglich Rechenzeit ist das EWS-Modell limitierend, da dieses pro Zeitschritt im Erdmodell mehrere Male durchgerechnet werden muss. Ausschlaggebend ist dabei vor allem die Filmmassenbilanz, da in

jedem Gitterpunkt der Filmmassenstrom aktualisiert werden muss. Wenn die Stoffwerte Dichte, Viskosität, Wärmeleitfähigkeit und spezifische Verdampfungsenthalpie jedes Mal an die aktuelle Temperatur angepasst werden, benötigt dies relativ viel Rechenzeit. Es wurde daher getestet, wie gross die Abweichung im berechneten Systemdruck ausfällt, wenn die Stoffeigenschaften konstant belassen werden. Die Abweichungen liegen im Bereich von 0.03 bar, sind also gering. Daher wurde mit konstanten Stoffwerten (auf der Siede- bzw. Taulinie bei 0°C) gerechnet.

3.5 Referenzbedingungen

Um mit klar definierten Bedingungen zu arbeiten, wurden Standardwerte für alle Parameter festgelegt. Falls nichts anderes erwähnt, wurde mit diesen Bedingungen gerechnet. Ausgehend von diesen Referenzeinstellungen, welche in Tab. 3-1 zusammengefasst sind, wurden im Rahmen der Parameterstudie die Parameter einzeln variiert, also eine Art Sensitivitätsstudie durchgeführt.

Parameter		Standardwert	Bemerkung
Verdampferleistung WP	\dot{Q}_v	7.5 kW	10 kW Heizleistung bei COP=4
Minimaler Druck am Sondenkopf	p_{min}	25 bar	Unterer Startwert Iteration
Maximaler Druck am Sondenkopf	p_{max}	50 bar	Oberer Startwert für Iteration, bestimmt Füllmenge
Sondenlänge	L	150 m	
\varnothing Aussenrohr (innen)	D	63 mm	
\varnothing Innenrohr (aussen)	d	0 mm	Konventioneller Thermosiphon ohne Innenrohr
Anzahl Einspritzstellen	N	1	Konventioneller Thermosiphon ohne Innenrohr
Höhe Modell	H	180 m	
Radius Modell	R	100 m	
Gitterpunkte r-Richtung	I	80	
Gitterskalierungsfaktor	γ	1.0899	
1. Gitterabstand r-Richtung	Δr_1	0.01 m	
Letzter Gitterabstand r-Richtung	Δr_{79}	8.25 m	
Gitterpunkte z-Richtung	J	91	
Gitterabstand z-Richtung	Δz	2 m	
Zeitschritte	Δt	0.001 h	(=3.6 s)

Tab. 3-1: Standardbedingung für Modellberechnungen.

Die Verdampferleistung von 7.5 kW ist angelehnt an den Verbrauch eines durchschnittlichen Einfamilienhauses. Daraus ergibt sich die Sondenlänge von 150 m, wenn maximal 50 W/m entzogen werden soll. Minimaler bzw. Maximaler Druckwert sind einerseits die Ausgangswerte für die Iterationsschlaufe, andererseits bestimmt der Maximalwert die Füllmenge und so die Poolhöhe. 50 bar entspricht einer CO₂-Siedetemperatur von 14.3°C. Die Modellrechnungen bestätigen, dass der Druck in der Sonde nie über diesen Wert steigen wird.

Der Standardfall ist ein konventioneller Thermosyphon, d.h. mit nur einer Einspritzstelle und ohne Innenrohr ($d=0$). Der relativ grosse Innendurchmesser des Aussenrohrs (63 mm) kommt daher, dass zu Beginn davon ausgegangen wurde, dass zur Vermeidung von Flüssigkeitsrückstau möglichst weite Rohre verwendet werden sollen. Durchmesser 63 mm liegt im Bereich des technisch Machbaren für Kunststoffrohre.

Bei der Analyse des Modellgitters zeigte sich, dass in r-Richtung die Grösse des ersten Elements Δr_1 einen grösseren Einfluss hat auf das Ergebnis als die Anzahl Gitterpunkte I , was sich damit erklären lässt, dass die Temperaturgradienten in Sondennähe am steilsten sind. Δr_1 wurde auf 0.01 m festgelegt. In z-Richtung konnte bei einer Verfeinerung des Gitters auf Abstände unter 2 m keine Veränderung des Resultats mehr festgestellt werden.

Die Länge der Zeitschritte ist durch die Kopplung der beiden Systeme limitiert. Bei zu grossen Zeitabständen funktioniert die stabilisierende, negative Rückkopplung auf die EWS nicht mehr und das System wird instabil. Bei Zeitschritten von 0.001 h wurden keine derartigen Instabilitäten festgestellt.

4 Resultate

4.1 Modell Erdwärmesonde ungekoppelt

Zuerst soll aus didaktischen Gründen auf den fiktiven Fall eingegangen werden, dass das EWS-Modell nicht mit der Erde gekoppelt ist, d.h. dass das Wandtemperaturprofil $T_w(z)$ zeitlich konstant bleibt, was allenfalls nur unter Laborbedingungen möglich wäre. Die Resultate (Abb. 4-1) zeigen die Bedingungen, welche sich in der Sonde in einem solchen Fall im stationären Zustand einstellen würden. Es werden zwei verschiedene Fälle betrachtet. Im ersten Fall ist die Wandtemperatur über die ganze Sondenlänge konstant. Im zweiten Fall steigt die Temperatur gegen unten mit einem Gradienten von 0.03 K/m , dies entspricht dem ungestörten Temperaturprofil der Erde (Anfangsbedingung im gekoppelten Modell).

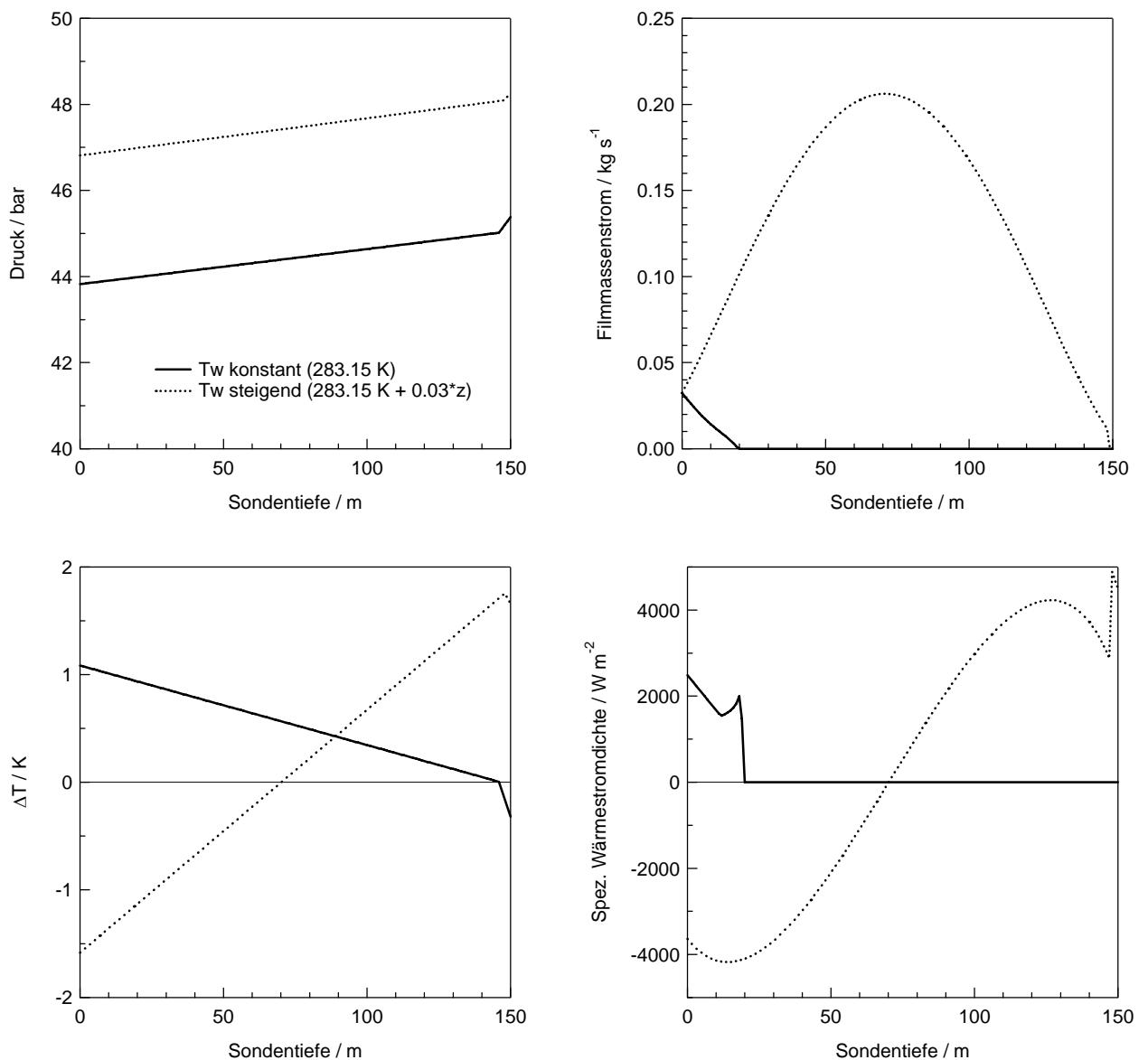


Abb. 4-1: Berechnete Verhältnisse in einer CO_2 -Erdwärmesonde im fiktiven Fall eines zeitlich konstanten Wandtemperaturprofils $T_w(z) \neq f(t)$.

Das Druckniveau, welches sich in der Sonde einstellt, ist im zweiten Fall höher, da die durchschnittliche Wandtemperatur höher ist. In beiden Fällen steigt der Druck gegen unten aufgrund der zunehmenden Gassäule. Im Bereich des Pools am Sondenende steigt der Druck noch steiler an. Durch den Druckanstieg erhöht sich auch die Siedetemperatur gegen unten. Wenn die Wandtemperatur konstant ist, sinkt daher die Temperaturdifferenz ΔT zwischen der Wand und der Filmoberfläche gegen unten. Im anderen Fall, mit zunehmender Wandtemperatur, mindert der Druckanstieg zwar die Steigung von ΔT gegen unten, die Kurve steigt aber kontinuierlich. Allerdings ist ΔT in der oberen Sondenhälfte negativ. Daher erfolgt der Wärmetransport von innen nach aussen und es kommt zur Kondensation von CO₂-Dampf an der Wand. Dies äussert sich in einem Anstieg des Filmmassenstroms im oberen Bereich. Die Verdampfung erfolgt erst in der unteren Hälfte, wobei auch der Pool seinen Beitrag dazu liefert. Der Film reicht also in diesem Fall bis zum Pool hinunter. Anders sieht es aus, wenn ΔT gegen unten kleiner wird, d.h. wenn sich die Bedingungen für den Wärmeübergang gegen unten verschlechtern. Dann verdampft der gesamte Film bereits, bevor er das Sondenende erreicht hat. Die Gesamtenergiebilanz (Formel (29)) ist so erfüllt, denn im Pool verdampft nichts. Die ΔT Kurve verläuft so, dass sie genau beim Anfang des Pools negativ wird. Würde sie bereits weiter oben negativ, käme es zu Kondensation in diesem Bereich und die Energiebilanz wäre nicht erfüllt.

Je nach Wandtemperaturprofil können sich also unterschiedliche Filmmassenstromprofile ausbilden. Wie die Untersuchungen mit den gekoppelten Modellen zeigen werden, hat jedoch der Fall, dass der Film nicht bis zum Sondenfuss hinunter reicht, in der Realität keine Bedeutung.

4.2 Zeitabhängiges Verhalten bei Blockbelastung

Im Weiteren soll nun betrachtet werden, wie sich die Verhältnisse in der Sonde zeitlich verändern, wenn das EWS-Modell mit dem Erdmodell gekoppelt wird und der Erde die vorgegebenen 7.5 kW ohne Unterbruch (Blockbelastung) entzogen werden. Dabei wird von den Referenzbedingungen ausgegangen.

Abb. 4-2 zeigt die Entwicklung des Flüssigkeitsfilms über die Zeit. Aus darstellerischen Gründen ist die Kurve zum Zeitpunkt $t=0$ nicht vollständig gezeigt. Sie entspricht dem im vorherigen Kapitel 4.1 diskutierten Fall, bei steigender Wandtemperatur unten. Das Erdtemperaturprofil ist zu diesem Zeitpunkt noch ungestört. Die Kurve durchläuft ein Maximum, das heisst im oberen Teil findet Kondensation von Dampf statt. Dadurch wird ein Teil der Wärmeenergie, welche durch die Verdampfung im unteren Teil der Sonde der Erde entzogen wird, oben wieder an diese zurückgegeben. Dies hat zur Folge, dass die Wandtemperatur am oberen Ende der Sonde in den ersten Minuten nicht sinkt, sondern steigt. Dies ist in Abb. 4-3 zu sehen. Die Wandtemperaturkurve flacht sehr schnell ab und sinkt in der Folge ohne signifikante Änderung in der Steigung kontinuierlich nach unten. Die Steigung ist letztlich vorgegeben durch den Verlauf des Druckprofils in der Sonde, welches die Siedetemperatur bestimmt. Bereits nach 0.1 h (= 6 min) ist das Temperaturprofil soweit ausgeglichen, dass keine Kondensation mehr stattfindet und der Filmmassenstrom bis zum Ende der Sonde kontinuierlich abnimmt. Die Filmmassenstromkurve strebt mit zunehmender Zeit gegen einen linearen Verlauf. Der Film reicht immer bis zum Sondenfuss bzw. Pool hinunter. Die Gründe dafür wurden bereits im vorherigen Abschnitt (4.1) dargelegt. Das gesamte System scheint sich also sehr gut selbst zu stabilisieren. Der Grund dafür ist der Rückkopplungseffekt der Wärmestromdichte \dot{q} auf die Wandtemperatur T_w .

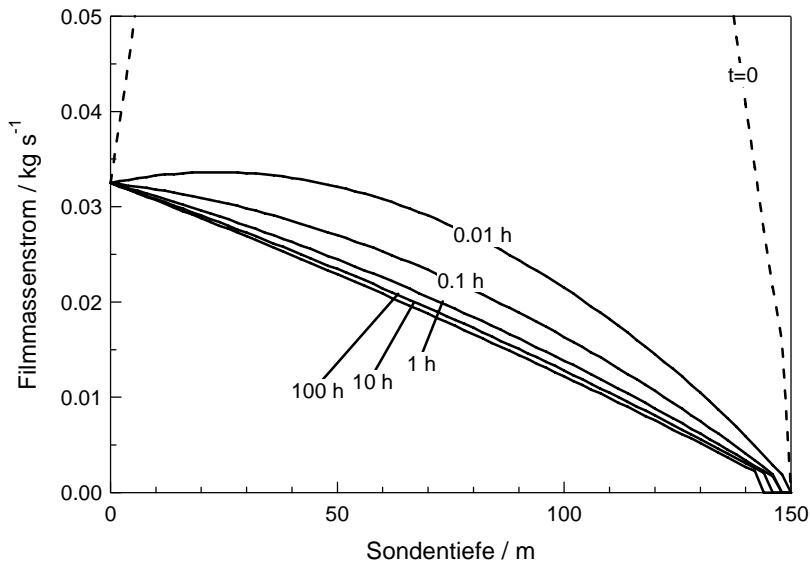


Abb. 4-2: Zeitlicher Verlauf des Filmmassenstroms $\dot{m}(z)$ bei Referenzbedingungen.

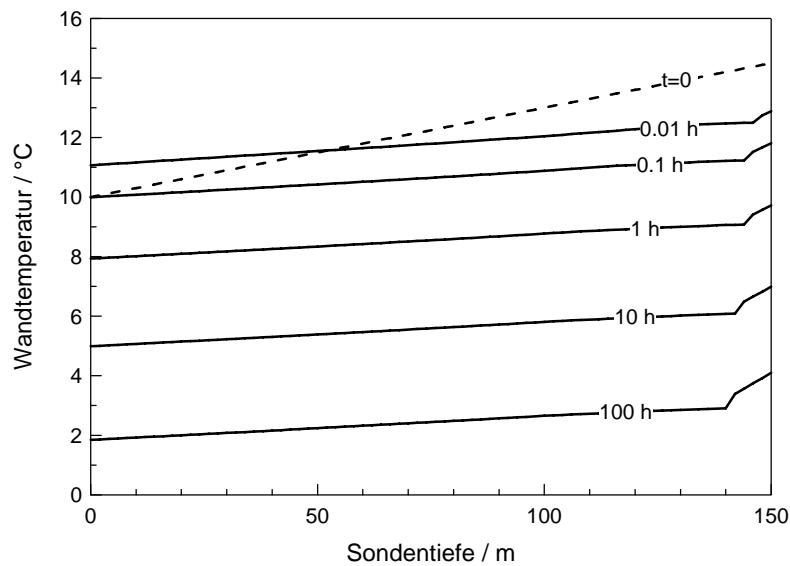


Abb. 4-3: Zeitliche Entwicklung der Wandtemperatur $T_w(z)$ bei Referenzbedingungen.

In Abb. 4-4 ist die Wärmestromdichte sowohl flächen- als auch längenspezifisch dargestellt. Die Wärmestromdichte nimmt gegen unten zu. Auch dieser Effekt gleicht sich jedoch über die Zeit aus. Bereits nach 10 h bewegt sich \dot{q}_L zwischen 38 bis 55 W/m. der Wärmeentzug erfolgt somit sehr gleichmäßig über die Sondenlänge.

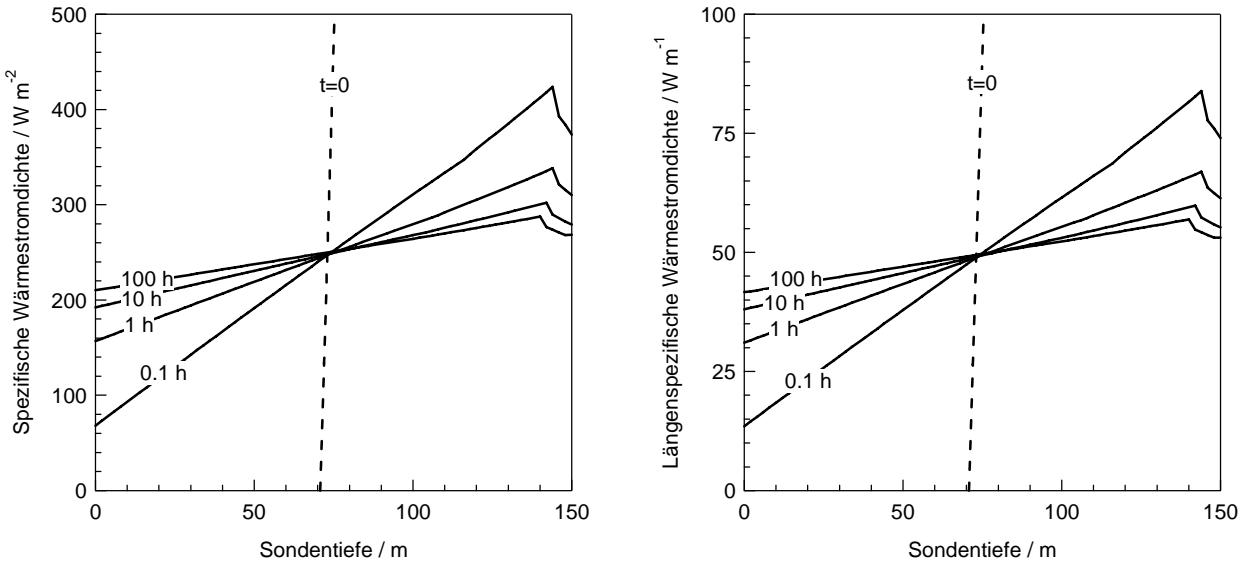


Abb. 4-4: Zeitlicher Verlauf der Längen- und Flächenspezifischen Wärmestromdichte \dot{q}_L resp. \dot{q} .

In Abb. 4-5 wird der Wärmeübergang genauer analysiert. Die Kurven, welche den Wärmeübergangskoeffizienten α zeigen, weisen mit Ausnahme der Kurve zum Zeitpunkt Null einen Knick auf. Dieser bezeichnet den Übergang vom turbulenten zum laminaren Strömungsregime, wenn der Filmmassenstrom einen bestimmten Wert unterschreitet (vgl. Kap. 2.4.1). α bewegt sich im Bereich von $2000 \text{ W/m}^2\text{K}$. Die Temperaturdifferenzen über dem Film bzw. zwischen Wand und Siedetemperatur in der Sonde sind sehr klein und bewegen sich in der Größenordnung von 0.1 bis 0.2 K. Im Bereich des Pools steigen sie sprunghaft an. Die Tatsache, dass die Wandtemperaturkurven und auch die spezifische Wärmestromdichte sehr gleichmäßig verlaufen, trotz des unregelmäßigen Verlaufs von α und ΔT , weist darauf hin, dass der Film nicht limitierend ist für den Wärmeübergang. Vielmehr wird der Wärmeübergangswiderstand durch die umgebende Erde bestimmt. Die Verhältnisse im Film passen sich an und nicht umgekehrt.

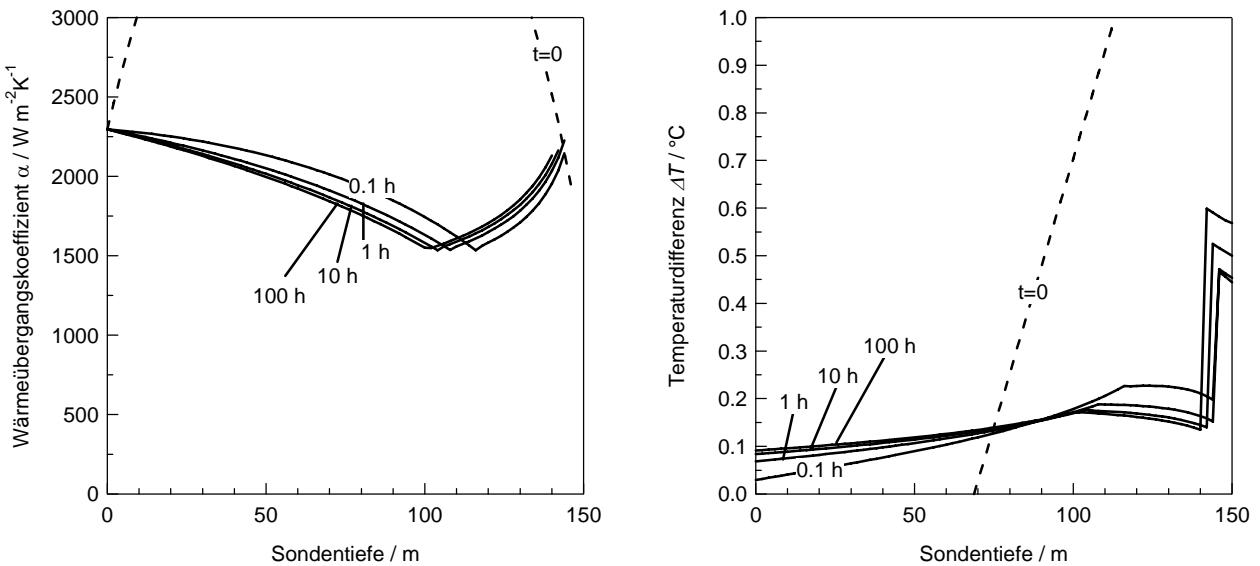


Abb. 4-5: Zeitlicher Verlauf des Wärmeübergangskoeffizienten α und der Temperaturdifferenz ΔT (Wand-Filmoberfl.).

Da die Temperatur des umgebenden Erdreichs durch den Wärmeentzug sinkt, muss auch der Druck in der Sonde sinken, damit die Wärmeübertragung weiterhin gegen die Sonde hin verläuft. In Abb. 4-6 ist der Verlauf des Drucks am oberen Ende der Sonde p_0 gezeigt. Parallel dazu sinkt auch die Temperatur am Sondenkopf. Diese Temperatur ist insofern entscheidend, als sie das Temperaturniveau für die Kondensation am Wärmetauscher vorgibt und somit letztendlich die Effizienz der Wärmepumpe bestimmt.

Der Druck erreicht nach 100 h Dauerbelastung einen Wert von 36.5 bar, was einer Temperatur von 1.8°C entspricht. Eine Abschätzung durch Extrapolation der Kurve auf 500 h ergibt eine Temperatur von ca. -0.4°C. Erfahrungsgemäß gilt, dass die Temperatur nach 500 h Dauerbelastung in etwa der tiefsten Temperatur in einer Heizsaison mit 1800 h entspricht [1]. Allerdings beruhen diese Erfahrungen auf Sole-Sonden. Ob sich diese Regel auch auf CO₂-EWS übertragen lassen, kann an dieser Stelle nicht beantwortet werden, denn dies hängt entscheidend mit dem Regenerationsverhalten zusammen.

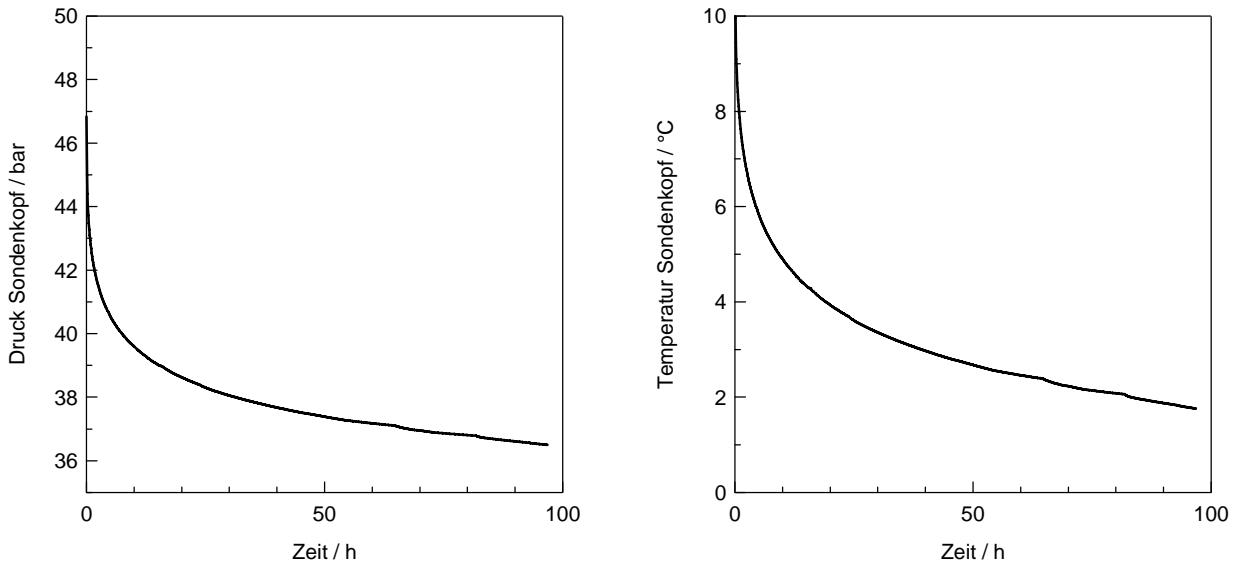


Abb. 4-6: Zeitlicher Verlauf von Druck und Kondensationstemperatur am Sondenkopf bei Blockbelastung mit 7.5 kW.

4.3 Parameterstudie

4.3.1 Einfluss der Anzahl Einspritzstellen

Ein wichtiges Ziel des Projektes ist, die Idee einer Mehrfacheinspritzung auf ihr Potenzial hin zu überprüfen. Wenn das CO₂-Kondensat durch Einführen eines konzentrischen Innenrohrs auf verschiedenen Höhenstufen eingebracht wird, wird der Massenstrom aufgeteilt und es ergibt sich ein „gezackter“ Verlauf der Massenstromkurve wie in Abb. 4-7 dargestellt. Interessanterweise verlaufen die Kurven nach der letzten Einspritzstelle jeweils genau gleich.

Um verschiedene Sondenkonfigurationen bezüglich ihrer Effizienz quantitativ zu beurteilen ist massgebend, bei welcher Temperatur das CO₂ am Sondenkopf kondensiert. Ein Vergleich des Temperaturverlaufs über eine Stunde (Abb. 4-8) zeigt, dass das Einführen von mehreren Einspritzstellen praktisch keinen Einfluss hat. Dies ist darauf zurückzuführen, dass der Wärmeübergangswiderstand im Film wie bereits diskutiert gegenüber dem Wärmeleitwiderstand des

Erdreichs vernachlässigbar klein ist und somit verschiedene Filmkonfigurationen für den Gesamtwiderstand kaum ins Gewicht fallen.

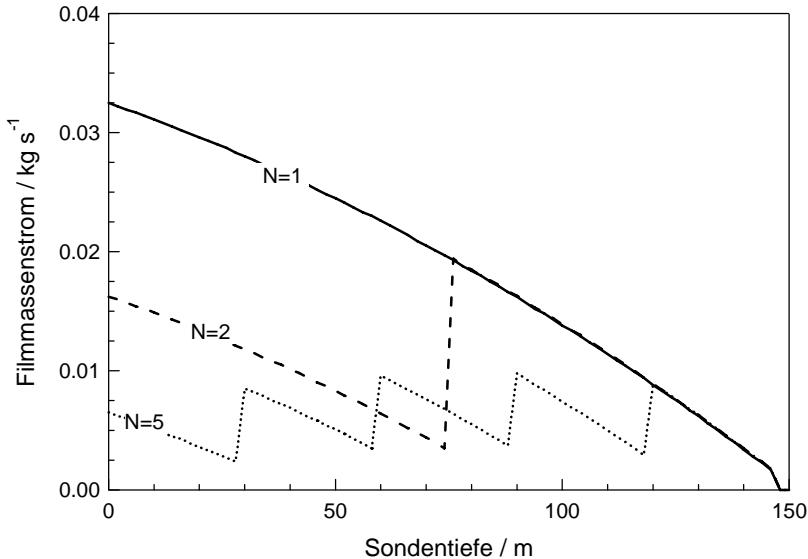


Abb. 4-7: Verlauf des Filmassenstrom nach einer Stunde bei unterschiedlicher Anzahl Einspritzstellen N.

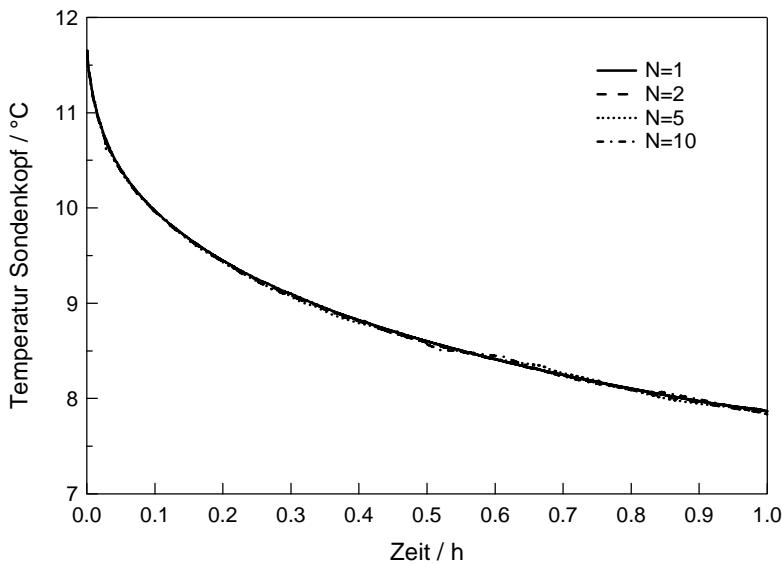


Abb. 4-8: Zeitlicher Verlauf der Kondensationstemperatur am Sondenkopf bei unterschiedlicher Anzahl Einspritzstellen N.

Hinsichtlich der Wärmeübertragungscharakteristik bringt daher die Mehrfacheinspritzung keinen Vorteil. Es wurde zusätzlich überprüft, ob durch die Reduktion des maximalen Filmassenstroms die Stauggrenze reduziert werden kann. In Abb. 4-9 ist aufgetragen, wie gross der Durchmesser des Innerrohrs maximal sein darf, bei gegebenem Außenrohrdurchmesser und Anzahl Einspritzstellen und maximal 7.5 kW Verdampferleistung. Berechnungsbasis sind die Gleichungen (8) bis (11). Jedoch wird der Vorteil durch die Notwendigkeit eines Innenrohrs, welche den Strömungsquerschnitt verringert, wieder reduziert. Aufgrund dieser Tatsachen wird sich daher der zusätzliche konstruktive Aufwand aus heutiger Sicht kaum rechtfertigen lassen.

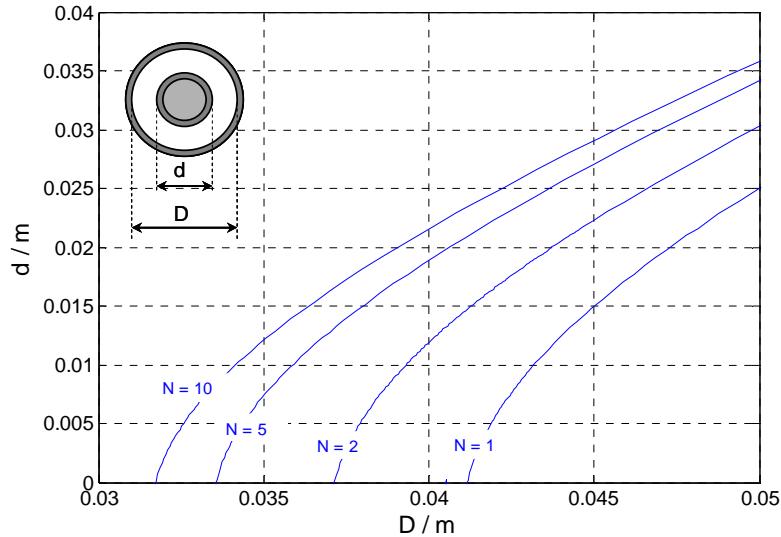


Abb. 4-9: Maximaler Durchmesser des Innenrohrs d bei entsprechendem Durchmesser des Außenrohrs D und Anzahl Einspritzstellen N damit die Staugrenze nicht überschritten wird. Gilt für 7.5 kW Verdampferleistung.

4.3.2 Einfluss des Sondendurchmessers

Aus Abb. 4-10 ist klar ersichtlich, dass mit steigendem Durchmesser ein höheres Temperaturniveau erzielt werden kann. Dabei machen 12 mm Unterschied jeweils ungefähr 0.5°C aus. Dies ist auf die grösere verfügbare Wärmeübertragungsfläche zurückzuführen. Bei den Standardsimulationen wurde von einer reinen Filmströmung ausgegangen. Gerade mit steigendem Durchmesser könnte jedoch durch Aufreissen des geschlossenen Films bei Unterschreitung eines gewissen minimalen Massenstroms die Rinnensalströmung eine gewisse Rolle spielen. Daher wurde bei den Simulationsreihen mit variablem Durchmesser ein Rinnensalmodell verwendet.

Dabei wurde angenommen, dass der Flüssigkeitsfilm bei Unterschreiten des minimalen Benetzungsmassenstroms aufreißt und sich auf einen Bruchteil des Gesamtumfangs $1/b$ zurückzieht. Folglich reduziert sich die Wärmeübertragungsfläche ebenfalls um diesen Faktor b bzw. der Massenstrom pro Umfang steigt um b . Daher erfolgt die Verdampfung dort langsamer. Bei den Filmmassenstromkurven (Abb. 4-11) ist dieser Bereich deutlich zusehen, da die Kurve flacher verläuft. Je nach Modell erfolgt der Filmaufbruch etwas früher oder später. Um zu beurteilen, ob die Berücksichtigung der Rinnensalströmung einen quantitativen Einfluss auf die Resultate hat, wurde die Kondensationstemperatur am Sondenkopf über der Zeit bei unterschiedlichem Durchmesser und jeweils mit und ohne Berücksichtigung der Rinnensalströmung aufgetragen. Es zeigt sich, dass dies keinen signifikanten Einfluss auf den Verlauf der Temperatur hat. Das Modell wird durch den zusätzlichen Rechenaufwand etwas instabiler und langsamer. Folglich wurden die weiteren Berechnungen ohne Berücksichtigung der Rinnensalströmung durchgeführt.

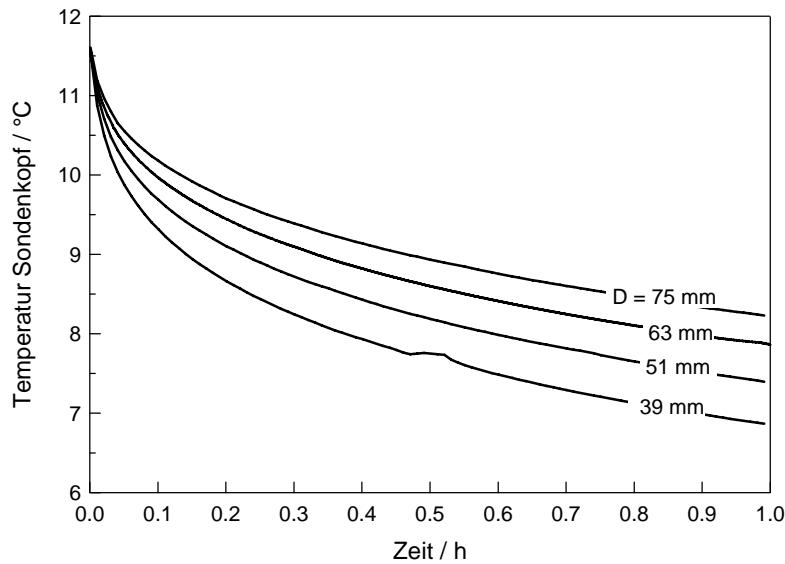


Abb. 4-10: Zeitlicher Verlauf der Kondensationstemperatur am Sondenkopf bei unterschiedlichem Sondendurchmesser D

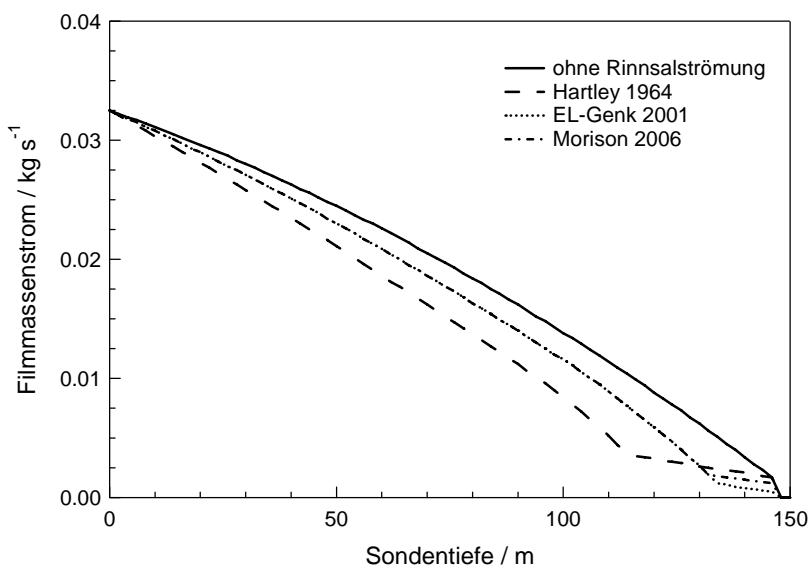


Abb. 4-11: Verlauf des Filmmassenstroms unter Berücksichtigung verschiedener Modelle zur Berechnung des minimalen Massenstroms bei jeweils gleichem vorgegebenem Wandtemperaturprofil $T_w(z)$ (T_w nach 1 h bei Referenzbedingungen). Aufteilkoeffizient $b = 5$, Benetzungswinkel $\theta = 70^{\circ}$.

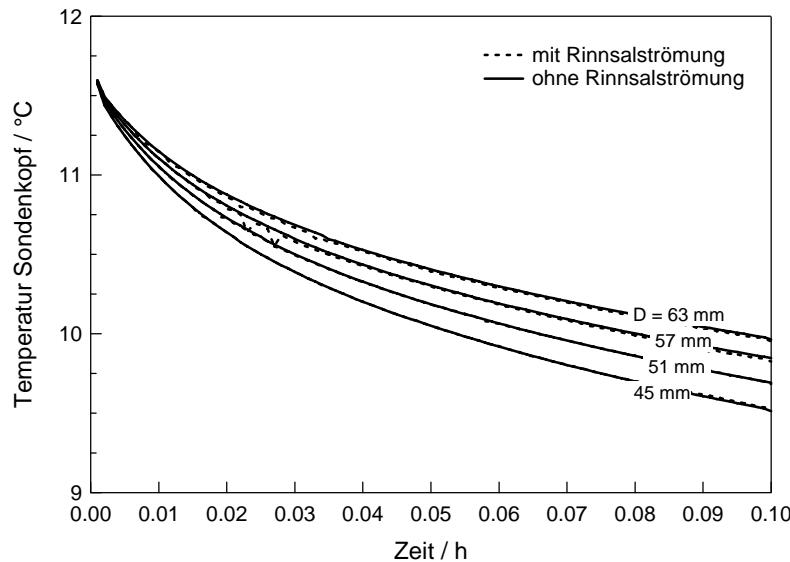


Abb. 4-12: Quantitativer Vergleich der Modelle mit und ohne Berücksichtigung von Rinnalströmung. Aufteilfaktor $b = 5$, Benetzungswinkel $\theta = 70^\circ$.

4.3.3 Einfluss der Sondenlänge

Mit zunehmender Länge einer Sonde werden Erdbereiche mit höherer Temperatur erschlossen. Dies ist der Grund dafür, dass die Durchschnittstemperatur in der Sonde und somit die erreichte Temperatur am Sondenkopf mit zunehmender Sondenlänge deutlich steigt (Abb. 4-13). Bereits nach einer Stunde Laufzeit beträgt die Differenz der Temperatur am Sondenkopf zwischen einer Sonde mit 100 m Länge und einer mit 150 m Länge 2.5°C. Diesem Vorteil stehen die höheren Installations- und Materialkosten gegenüber. Zudem können andere Gründe wie zum Beispiel aufwändiger Bewilligungsverfahren für tiefere Sonden erschwerend sein.

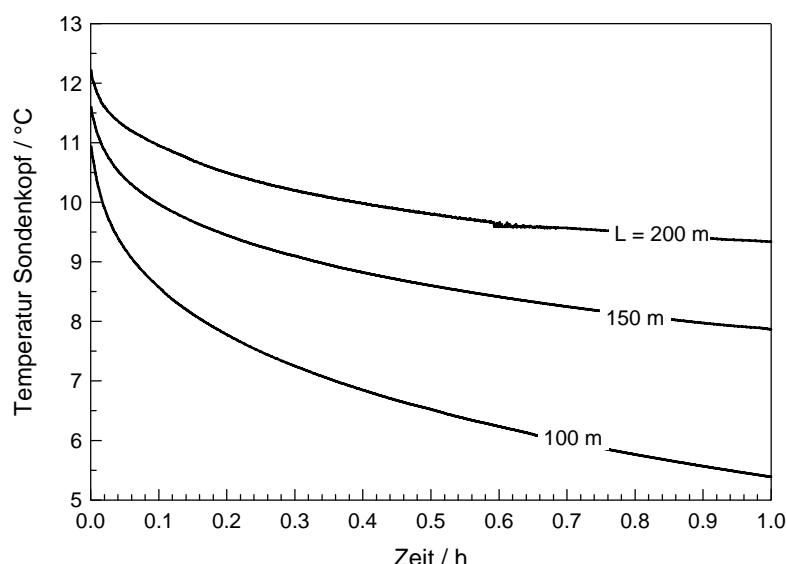


Abb. 4-13: Zeitlicher Verlauf der Kondensationstemperatur am Sondenkopf bei unterschiedlicher Sondenlänge L .

4.3.4 Regenerationsverhalten

Wenn die Wärmepumpe ausgeschaltet ist, wird netto keine Leistung entzogen. Die Simulationen zeigen jedoch, dass der Thermosiphon auch in diesem Fall „aktiv“ ist. Durch Verdampfung im unteren Teil und Kondensation im oberen Teil der Sonde wird dauernd ein Flüssigkeitsfilm aufrecht erhalten (Abb. 4-14). Dadurch entsteht ein aktiver Energietransport von unten nach oben, welcher dafür sorgt, dass das Wandtemperaturprofil dauernd ausgeglichen bleibt. Wenn beispielsweise mit einem Wandtemperaturprofil des ungestörten Erdreichs begonnen wird, nimmt die Kurve innerhalb kürzester Zeit dieselbe Steigung an wie nach 10 h Belastung mit 7.5 kW (Abb. 4-15), lediglich das Niveau verschiebt sich. Die Anfangsbedingung mit einem ungestörten Erdtemperaturprofil ist daher eher fiktiv, da der Temperaturausgleich entlang der Sonde erfolgt, sobald das Arbeitsfluid eingefüllt ist, auch wenn die Wärmepumpe noch nie eingeschaltet wurde.

Dieser Effekt ist von Vorteil für das Regenerationsverhalten des Erdreichs, indem ein konvektiver Wärmetransport von unten nach oben erfolgt. Dies im Gegensatz zu einer Sole-Sonde, bei welcher der Transport rein konduktiv erfolgt, wenn die Umwälzpumpe ausgeschaltet ist.

In Abb. 4-16 ist der Verlauf von Druck und Temperatur am Sondenkopf über 20 Tage in einem „Extremmonat“, mit einer Heizphase von jeweils 12h (Ausnutzung Niedertarif während Nacht), gezeigt. Realistischerweise wurde in diesen Berechnungen mit einem Rohrinnendurchmesser von 45 mm anstatt 63 mm gerechnet. Es hat sich im Verlauf der Studie gezeigt, dass dieser Durchmesser ausreicht, um unterhalb der Staugrenze zu bleiben. Es zeigt sich dabei einerseits die Spannweite, in der sich Druck und Temperatur in der Sonde zwischen Regenerations- und Belastungsphase bewegen. Die Spanne beim Druck beträgt etwa 7 bar, bei der Temperatur sind es 7°C. Die Temperatur nach der Belastungsphase nimmt von Tag 1 zu Tag 20 um ungefähr 2°C ab.

Langzeitsimulationen sind sehr rechenaufwändig. Es war daher im Rahmen dieser Studie nicht möglich, eine ganze Heizsaison zu simulieren. Um trotzdem eine quantitative Aussage über die Effizienz einer CO₂-EWS machen zu können, wurde wie im nächsten Abschnitt dargelegt, eine vergleichende Kurzzeitsimulation mit einer Sole-Sonde durchgeführt.

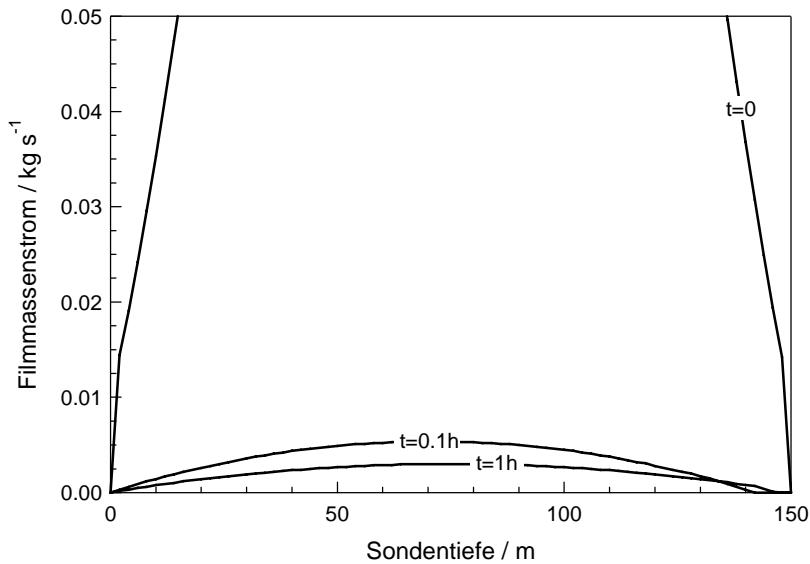


Abb. 4-14: Verlauf des Filmassenstroms bei ausgeschalteter Wärmepumpe ($\dot{Q}_v = 0$), ausgehend von einem ungestörten Erdtemperaturprofil (d.h. ohne vorherige Belastung).

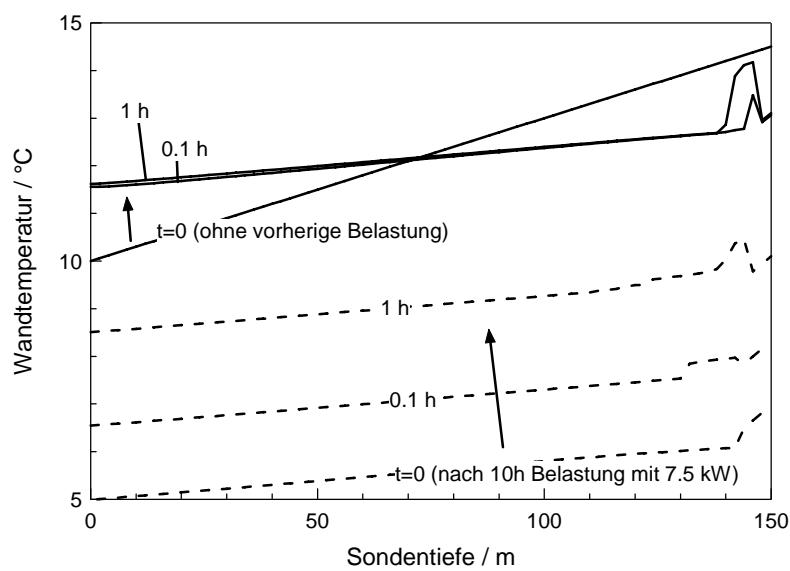


Abb. 4-15: Zeitliche Entwicklung der Wandtemperatur $T_w(z)$ bei ausgeschalteter Wärmepumpe ($\dot{Q}_v = 0$) unter zwei verschiedenen Anfangsbedingungen: a) ausgehend von ungestörtem Erdtemperaturprofil, b) ausgehend von einer Temperaturverteilung nach 10 h Sondenlaufzeit mit $\dot{Q}_v = 7.5 \text{ kW}$.

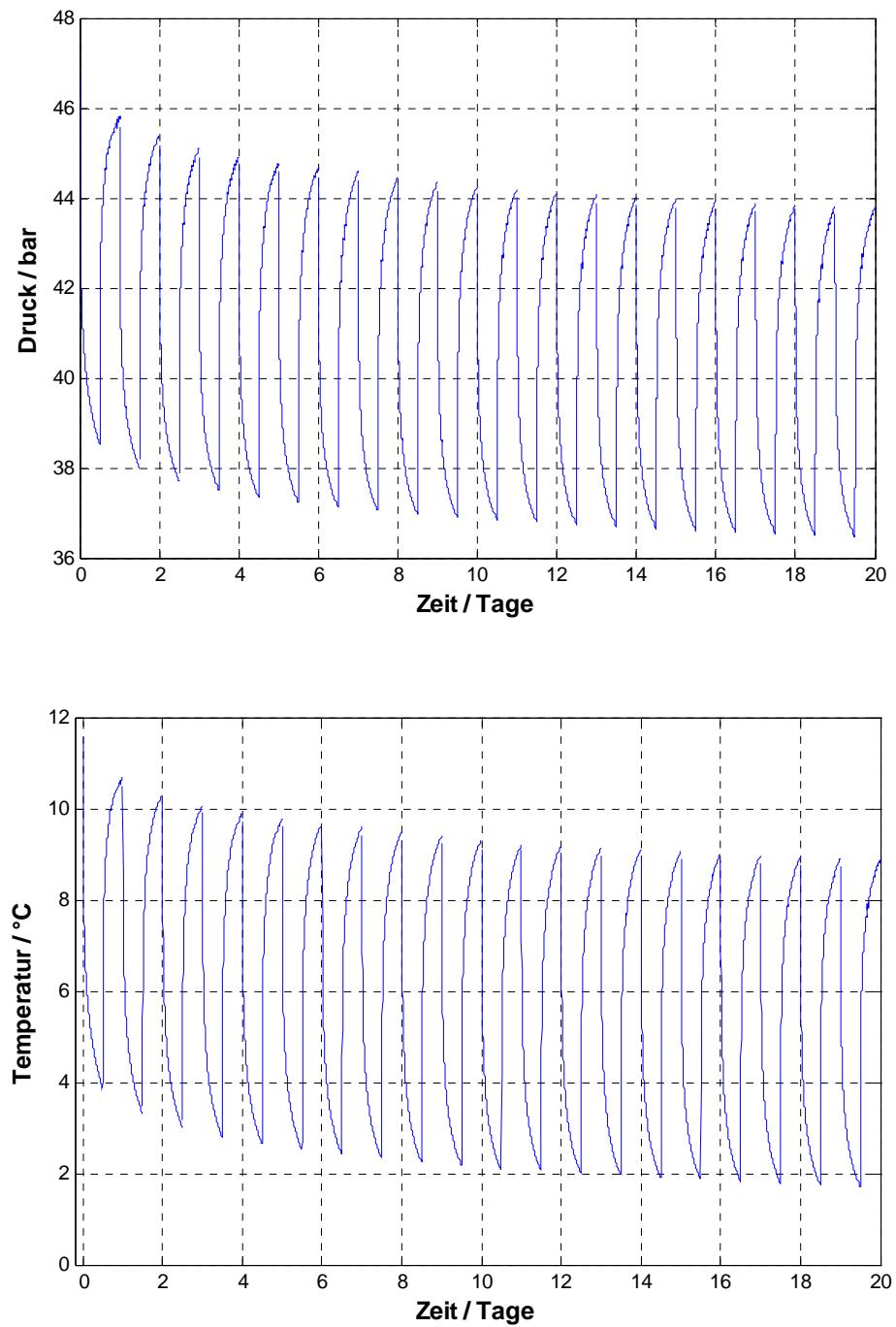


Abb. 4-16: Verlauf von Druck und Temperatur am Sondenkopf über mehrere Tage mit jeweils 12 h Heizdauer.
Rohrinnendurchmesser 45 mm, Verdampferleistung 7.5 kW.

4.4 Quantitativer Vergleich mit einer Wasser-/Glykol-Sonde

4.4.1 Modell der Wasser/Glykol-Sonde

Um eine quantitative Aussage über die Effizienz einer CO₂-EWS im Vergleich zu einer herkömmlichen Wasser/Glykol-EWS machen zu können ist es notwendig, die Daten aus dem Simulationsmodell mit einem Modell einer solchen Sonde zu vergleichen und zwar unter möglichst denselben Randbedingungen. Eine U-Rohr Sonde ist nicht axialsymmetrisch und benötigt daher ein 3-D Modell. Dies ist einiges aufwändiger bezüglich Aufbau und benötigter Rechenleistung. Die Simulationen wurden von der Firma Geowatt AG durchgeführt, die über grosse Erfahrung in diesem Gebiet verfügt. Dazu wurde das FE-Simulationsprogramm FRACTure verwendet. FRACTure wurde am Institut für Geophysik der ETH Zürich entwickelt. Mittlerweile wurde dieses Programm weiterentwickelt und für spezielle Anwendungen von der Firma GEOWATT AG angepasst. FRACTure wurde in der Vergangenheit für eine Vielzahl von numerischen Berechnungen eingesetzt, wobei ein weiter Skalenbereich (<0.1 mm bis > 100 km) abgedeckt wird [26].

Um die thermische Leistung der beiden Sondentypen vergleichen zu können, wurde ein Modell einer Duplex-Erdwärmesonde mit üblichen Abmessungen erstellt. Sole-Erdwärmesonden bestehen meist aus einem oder zwei U-Rohren, die in bis zu 400 m tiefe Bohrungen installiert werden. In der Schweiz werden meist zwei U-Rohre, sog. Duplex-Sonden, verwendet. Ab einer Tiefe von 150 m werden aus hydraulischen Gründen PE100-Rohren mit 40 mm Aussendurchmesser eingebaut. Bei geringeren Tiefen können Rohre mit 32 mm Aussendurchmesser verwendet werden. Der Durchmesser der Bohrungen beträgt ca. 135 mm. Der Hohlraum zwischen den EWS-Rohren und der Bohrlochwand wird mit einer Zementsuspension hinterfüllt.

Abb. 4-17 zeigt den horizontalen Querschnitt durch diese Duplex-Erdwärmesonde. Die Masse sind in Tab. 4-1 aufgeführt.

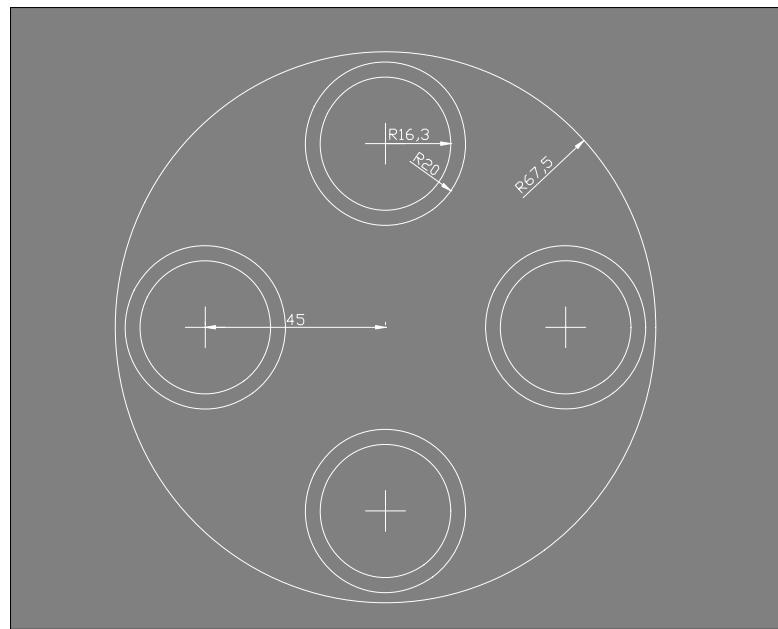


Abb. 4-17: Typische Geometrie einer Duplex-Erdwärmesonde. Abmessungen in Millimeter.

Das Modell der CO₂-Sonde ist rotationssymmetrisch. Entsprechend wurde die Duplex-EWS im Zentrum eines Zylindervolumens mit den gleichen Ausmassen eingesetzt (Abb. 4-18). Die horizontale Diskretisierung des FE-Modells ist in Abb. 4-18 ebenfalls dargestellt. Das Gitter bildet das Modell der Duplex-EWS mit ausreichender Genauigkeit ab. Mit zunehmendem Abstand von der Modellachse

werden die 3D-Elemente schrittweise grösser (Faktor 1.5). Die vertikale Auflösung beträgt konstant 1 m.

Die Ein- und Austrittstemperatur der Duplex-EWS wurde für eine Betriebsdauer von 3 Tagen mit einer konstanten Zeitschrittweite von 15 Sekunden simuliert. Nach einem 12-stündigen Wärmeentzug folgt jeweils eine 12-stündige Regenerationsphase. Die thermische Leistung beträgt 7.5 kW bei einer konstanten Temperaturdifferenz von 3°C zwischen Ein- und Austritt der Sonde bei einer Zirkulationsrate von 0.61 l/s.

Parameter	Mass
Aussenradius U-Rohr	20 mm
Innenradius U-Rohr	16.3 mm
Abstand U-Rohre von Achse	45 mm
Radius Bohrung	67.5 mm
Radius FE-Modell	100 m
Tiefe EWS	150 m
Tiefe FE-Modell	180 m

Zone	α [W/m/K]	$c_p \cdot \rho$ [MJ/m ³ /K]
Hinterfüllung	0.8	2.2
Sondenrohre	0.4	2.2
Sondenfluid	0.6	4.2
Erde	2.4	2.6

Tab. 4-1: Abmessungen und Materialeigenschaften der verschiedenen Zonen in der Sole-Erdwärmesonde.

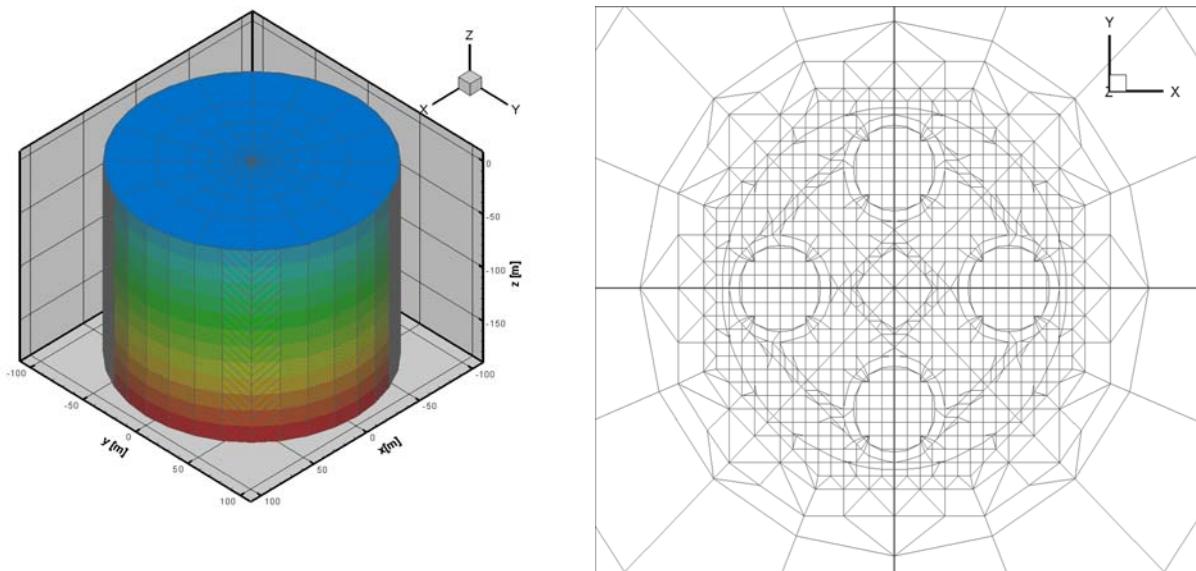


Abb. 4-18: Links: 3D FE-Modell der Duplex-EWS (Radius: 100 m, Tiefe: 180 m, vertikale Auflösung: 1 m). Rechts: Diskretisierung des EWS-Modells in der Umgebung der Modellachse.

4.4.2 Vergleich der beiden Modelle

Die Simulationsergebnisse aus dem Modell der Duplex-Sonde wurden mit den Ergebnissen des Modells der CO₂-EWS verglichen und sind in Abb. 4-19 dargestellt. Die Spreizung zwischen Ein- und Austrittstemperatur der Duplex-EWS ist aufgrund des Modells auf 3°C festgelegt. Die Temperatur am Sondenkopf der CO₂-EWS liegt ziemlich genau dazwischen. Im ersten Regenerationszyklus steigt die Temperatur in der CO₂-EWS auf 10.7°C, also höher als die 10°C Ausgangstemperatur. Dies ist auf den selbsttägigen Umlauf von CO₂ auch in der Regenerationsphase zurückzuführen. Die Spitzentemperatur nimmt über die Zeit ab. Die Soletemperatur strebt jeweils gegen 10°C. Dass diese Spitzentemperatur bei der Sole-Sonde im Gegensatz zur CO₂-EWS kaum abnimmt, hat aber mit der unterschiedlichen Randbedingung an der Erdoberfläche bei den beiden Modellen zu tun. Beim Sole-Modell wird die Oberflächentemperatur bei 10°C gehalten, daher strebt die Soletemperatur immer gegen 10°C. Beim CO₂-EWS-Modell wurde aus bereits diskutierten Gründen die Oberfläche als isoliert betrachtet und dementsprechend sinkt die Temperatur dort in der Nähe der Sonde ab. Das thermische Verhalten über die gesamte Länge der EWS wird durch die Wahl der Randbedingung am oberen Modellrand jedoch nicht wesentlich beeinflusst.

Die Temperaturen am Ende des Belastungszyklus nehmen mit jedem Tag ab. Eine genauere Analyse der Daten zeigt, dass die Temperaturen in der CO₂-EWS von Tag 1 zu Tag 3 um 0.85°C abnehmen. In der Sole-Sonde sind es im selben Zeitraum 1.07°C. Dies deutet darauf hin, dass die Absenkung der Erdtemperatur bei der CO₂-EWS aufgrund der besseren Regeneration weniger schnell erfolgt. Aufgrund des dafür benötigten hohen Rechenaufwandes war es im Rahmen dieser Studie leider nicht möglich, solche vergleichenden Berechnungen über einen längeren Zeitraum oder gar über eine ganze Heizsaison durchzuführen.

Wie bereits im Abschnitt 4.3.2 gezeigt, hat auch der Sondendurchmesser einen Einfluss auf die Lage des Temperaturniveaus. Zudem wird die Temperatur etwas höher ausfallen, wenn vier anstatt nur ein Rohr verwendet werden. Die Resultate deuten aber darauf hin, dass bei gleicher Ausgangslage (gleiches Erdtemperaturprofil) die Temperatur am Kopf der CO₂-EWS in etwa gleich hoch ist wie die Mischtemperatur der Sole. Es sind also nicht die Verhältnisse in der Sonde, sondern die Wärmeleitung in der Erde, welche limitierend wirkt.

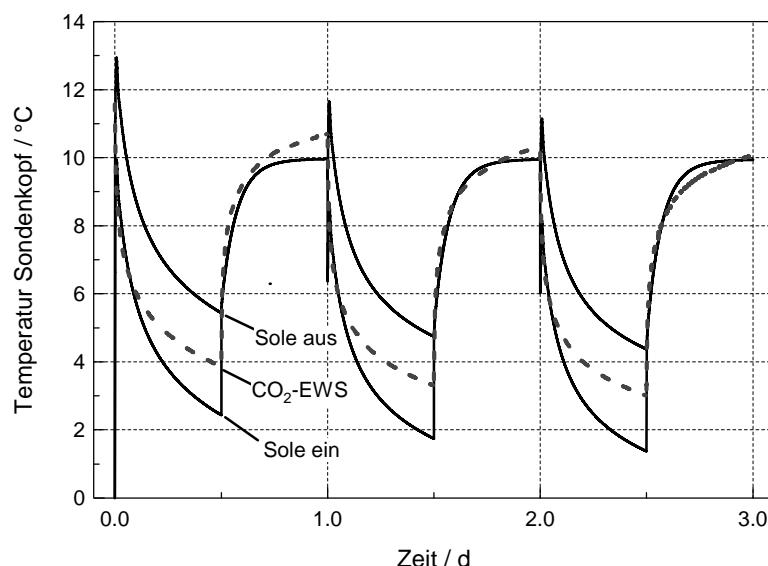


Abb. 4-19: Vergleich des Temperaturverlaufs am Sondenkopf zwischen einer CO₂-EWS ($D=45\text{ mm}$) und einer typischen Duplex-Sonde (Wasser/Glykol). Jeweils 12 h Belastung mit 7.5 kW und 12 h Regeneration.

4.4.3 Auswirkung auf die Arbeitszahl der Wärmepumpe

Gemäss der Potenzialabschätzung in der Vorgängerstudie zu diesem Projekt [1] gibt es drei Unterschiede zwischen den beiden Sondentypen, welche die Arbeitszahl massgeblich beeinflussen:

1. Wegfall der Umwälzpumpe
2. Zusätzlicher Druckverlust in der Saugleitung zwischen Verdampfer und Kompressor in der Wärmepumpe bei einer CO₂-EWS.
3. Verdampfungstemperatur in der Wärmepumpe

Die Abschätzungen zu den ersten beiden Punkten werden an dieser Stelle übernommen. Gemäss FAWA-Studie [27] verbessert sich die Arbeitszahl durch den Wegfall der Umwälzpumpe je nach Optimierungsgrad zwischen 6 bis 13%. Durch die Spaltung der Wärmepumpe bei der CO₂-EWS entsteht ein erhöhter Druckverlust in der Saugleitung zwischen Verdampfer und Kompressor. Dies verringert die Arbeitszahl um schätzungsweise 0.5%.

Aufgrund der aktuellen Resultate können hingegen die Abschätzungen zum dritten Punkt angepasst werden. Als Vergleichsbasis werden die simulierten Temperaturen nach der Heizphase am 3. Tag verwendet. Die CO₂-Temperatur auf der Sondenseite beträgt ca. 3°C, die Soletemperaturen ca. 1.4 bzw. 4.4°C. Bei der Solesonde ergibt sich dabei unter Verwendung des Kältemittels R407C und bei einer Solespreizung von 3°C gemäss [1], S. 47 eine Verdampfungstemperatur von rund -4°C.

Messungen an Pilotanlagen zeigen, dass bei einer CO₂-EWS die Temperaturdifferenz zwischen Sondenkopf und Verdampfer deutlich geringer ausfällt. Die Kondensationstemperatur ist über die Wärmeaustauschfläche konstant, d.h. bleibt bei 3°C. Bei einer Anlage von vergleichbarer Kapazität wie bei der Simulation in diesem Projekt, wurde zwischen Sondenkopf und Verdampfer eine Temperaturdifferenz von lediglich ca. 2°C gemessen [28]. Im obigen Beispiel kann daher für die CO₂-EWS eine Verdampfungstemperatur von 1°C angenommen werden, d.h. 5°C höher als bei der Sole-Sonde. Gemäss einer Faustregel bewirkt eine Erhöhung des Temperaturniveaus im Verdampfer um ein Grad Celsius eine Verbesserung der Arbeitszahl um 2 bis 2.5%. Dies bedeutet bei 5°C eine Erhöhung zwischen 10 bis 13%. Zusammengefasst ergibt dies:

Wegfall Umwälzpumpe	6 – 13 %
Druckverlust Saugleitung	- 0.5 %
Höhere Verdampfungstemperatur	10 – 13 %
Total ca.	15 – 25%

Das Verbesserungspotenzial dürfte also im Bereich von 15 bis 25 % liegen. Da sich die Abschätzung der Verdampfungstemperatur auf eine Kurzzeitsimulation stützt (3 Tage), ist darin ein allfälliger positiver Effekt durch bessere Regeneration des Erdreichs bei einer CO₂-EWS noch nicht berücksichtigt.

Konkrete Zahlen aus der Praxis sind zwar noch rar, bestätigen aber die hohen Erwartungen. Wie bereits erwähnt, wurde bei der CO₂-Erdwärmesonde in Bubendorf in der ersten Heizsaison eine Jahresarbeitszahl von 5.0 ermittelt. Die Anlage im deutschen Bensheim wies in den ersten drei Jahren eine durchschnittliche Jahresarbeitszahl von 5.25 auf (Heizung 5.9, Warmwasser 4.0). Die Jahresarbeitszahl einer Sole/Wasser-Wärmepumpe liegt typischerweise im Bereich von 4. Verglichen damit liegen die erwähnten CO₂-EWS um 25% und mehr darüber.

5 Machbarkeitsstudie und Auslegungskriterien

Bei der Formulierung der Ziele für dieses Projekt wurde davon ausgegangen, dass die Mehrfacheinspritzung gegenüber dem einfachen Thermosiphon einen wesentlichen Vorteil bringt. Darauf basierte auch die Vorstellung von der Machbarkeitsstudie. Im Laufe des Projektes hat sich nun gezeigt, dass dies nicht der Fall ist und eine Mehrfacheinspritzung nicht notwendig ist.

Für konventionelle Thermosiphons existieren wie in Kap. 1.5 dargelegt, bereits marktreife Lösungen, sodass eine Machbarkeitsstudie hinfällig wird. Es soll an dieser Stelle jedoch diskutiert werden, ob es allenfalls Verbesserungsmöglichkeiten oder Alternativen zu den bestehenden Systemen gibt.

5.1 Dimensionierung der Rohre

Bei der Dimensionierung einer CO₂-Erdwärmesonde ist zu beachten, dass der Rohrdurchmesser nicht beliebig klein gewählt werden kann. Bereits mehrmals wurde darauf hingewiesen, dass die gewünschte Entzugsleistung den minimalen Innendurchmesser des Rohres aufgrund der Staugrenzenkorrelation bestimmt (Abb. 5-1). Je grösser der Rohrdurchmesser, desto schlechter lässt sich aber das Material wickeln und dies stellt bei der Verteufung der Sonde ein Problem dar. Entweder muss die Sonde in mehrere kleinere Rohre aufgeteilt werden, um die gewünschte Entzugsleistung erbringen zu können (M-Tec Mittermayr) oder aber die Wickelbarkeit muss mit Materialinnovation verbessert werden (Spiralwellrohr, Brugg Rohrsysteme).

Neben den bestehenden Lösungen (1 Rohr à 1 Loch bzw. 2-3 Löcher à 4 Rohren) gibt es selbstverständlich diverse andere Möglichkeiten. Damit kombiniert stellt sich auch die Frage, wie tief gebohrt werden soll. Aus energetischer Sicht ist die Antwort klar: Je tiefer die EWS hinunter reicht, desto wärmere Schichten werden erschlossen, was die Energieeffizienz erhöht. Aus dieser Perspektive ist also ein tieferes Bohrloch sinnvoller als mehrere kürzere wie bei den M-Tec Anlagen. Demgegenüber stehen aber oft praktische Gründe. In Deutschland wird kaum tiefer als 100 m gebohrt, da ab dieser Stufe Deutsches Bergbaurecht zum Tragen kommt, was das Bewilligungsverfahren verkompliziert. Zudem sind die Bohrfirmen teilweise nicht dafür eingerichtet, tiefer zu bohren und man hält sich gemäss K. Mittermayr an diesen Usus. Höhere Kosten und geologische Gründe können zudem auch gegen ein tieferes Bohrloch sprechen.

Wenn die Sondenlänge gegeben ist bleibt noch die Frage nach der Anzahl Rohre pro Loch in der möglichen Spanne zwischen einem und der maximal möglichen Anzahl bei vorgegebenem Bohrradius. Eine abschliessende Antwort kann im Rahmen dieses Berichtes nicht gegeben werden. In die Optimierungsfunktion einfließen werden Materialkosten, Handling beim Verteufen, Sicherheit im Betrieb und energetische Effizienz.

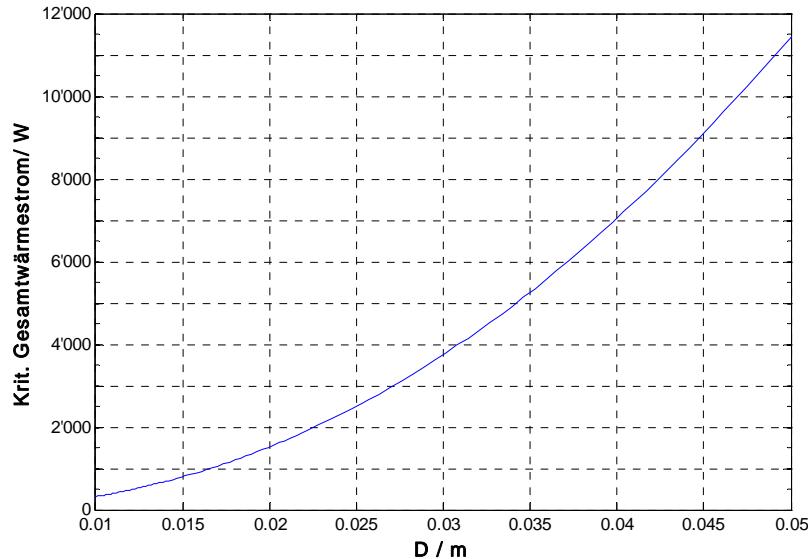


Abb. 5-1: Entziehbare maximale Wärmeleistung in einer CO₂-Erdwärmesonde bei gegebenem Rohrdurchmesser, basierend auf der Staugrenzenkorrelation nach Tien [16].

5.2 Rohrmaterial

Bei existierenden CO₂-Erdwärmesonden wird bisher Kupfer (PE-ummantelt) bzw. Edelstahl (Spiralwellrohr) verwendet. Das Rohrmaterial muss druckfest und sehr diffusionsdicht sein, um CO₂-Verluste zu vermeiden. Zudem muss es wickelbar sein. Das Spiralwellrohr ist eine elegante Lösung, um auch bei grösserem Rohrdurchmesser alle drei Eigenschaften unter einen Hut zu bringen. Kupfer und Stahl haben aber den Nachteil, dass sie relativ teuer sind, was momentan ein Hauptgrund ist für die Mehrkosten einer CO₂-EWS im Vergleich zu einer Sole-EWS.

Wenn Kunststoff als Rohrmaterial eingesetzt werden soll, ist vor allem das Kriterium der Diffusionsdichtheit eine Herausforderung, welches mit Standardmaterialien nicht zu erfüllen ist. Es muss eine Diffusionssperrschicht eingefügt werden. Auch die Verbindungsstellen müssen absolut dicht sein. Kunststoffrohre haben dann eine Chance auf dem Markt, wenn sie preisgünstiger sind als Metallrohre.

5.3 Wärmeübertrager am Sondenkopf

Dieser Teil der Anlage wurde bisher in dieser Arbeit nicht berücksichtigt. Der Wärmeübertrager ist am Sondenkopf positioniert und hat die Aufgabe, die Erdwärme an das Arbeitsfluid der Wärmepumpe abzugeben. Auf der Sondenseite findet Kondensation von CO₂ und auf der Wärmepumpenseite Verdampfung des Kältemittels statt. Der Wärmeübertrager muss in einem Druckkessel platziert werden. Die sorgfältige Auslegung dieses Wärmeübertragers ist eine unabdingbare Voraussetzung für einen effizienten Betrieb der Anlage.

5.4 Alternative Arbeitsfluide

Eine pumpenlose Erdwärmesonde könnte auch mit anderen Arbeitsmedien anstelle von CO₂ betrieben werden. Das Medium sollte kostengünstig sein, das Nassdampfgebiet muss in einem Druckbereich liegen, welcher technisch handhabbar ist und die Staugrenze darf nicht zu tief liegen. Das bedeutet, dass bei gegebenem Rohrdurchmesser die maximal entziehbare Wärmeleistung möglichst hoch sein sollte. In Abb. 2-5 sind die Staugrenzenkorrelationen für verschiedene Stoffe aufgetragen. Ammoniak (NH₃) und Propan kämen theoretisch als mögliche Arbeitsmedien in Frage. Die Sonden könnten im Druckbereich zwischen 4 und 5 bar betrieben werden. Allerdings steht Ammoniak wegen der Grundwassergefährdung im Falle eines Lecks nicht zur Diskussion. Propan ist brennbar und stellt beim Füllen und im Fall eines Lecks ein Sicherheitsrisiko dar.

Sehr kostengünstig und unbedenklich wäre Wasser bzw. Wasserdampf. Allerdings müsste die Sonde im Vakuum betrieben werden (ca. 6 mbar) und es wären sehr weite Rohre notwendig.

Es gibt daher bislang keine sinnvolle Alternative zu CO₂ als Arbeitsfluid.

5.5 Füllmenge

Im optimalen Fall ist die Füllmenge an CO₂ so bemessen, dass ein kleiner Pool am Sondenende als Puffer für den Ausgleich der Druckschwankungen vorhanden ist. Er sollte jedoch nicht zu gross sein, denn die Verdampfung im Pool ist weniger effizient und der Druck steigt innerhalb der Flüssigkeit gegen unten stark an. Die Füllmenge richtet sich daher nach dem Maximaldruck. Dieser wiederum ergibt sich aus dem Dampfdruck bei der höchsten zu erwartenden Durchschnittstemperatur in der Sonde.

Ist die Füllmenge zu gering, ist auch der Druck in der Sonde zu tief. Der Flüssigkeitsfilm verdampft bereits im oberen Bereich vollständig. Dies führt zu einer starken lokalen Abkühlung des Erdreichs und daher auch zu einer tieferen Kondensationstemperatur des CO₂.

Anhaltspunkte zur Füllmenge können der Abb. 3-4 entnommen werden. Allerdings ist beim Fülvorgang der Druck die bessere Messgröße. Sobald der Druck bei Einfüllen konstant bleibt, ist das Zweiphasengebiet erreicht, danach füllt sich der Pool langsam.

5.6 Einbringen der Rohre

Beim Einbringen der Rohre ist zu beachten, dass der Auftrieb kompensiert werden muss, da die Rohre nicht wie bei einer Sole-Sonde mit Flüssigkeit gefüllt werden können. Sie müssen daher mit Gewichten versenkt werden. Eine Beschädigung der Rohre ist ausserdem wegen der Leckgefahr unbedingt zu vermeiden.

6 Schlussfolgerungen

Insgesamt konnte in dieser Arbeit das Verständnis für die physikalischen Vorgänge in einer CO₂-Erdwärmesonde deutlich erhöht werden. Die Simulationsresultate zeigen, dass sich die Verhältnisse in der Sonde unter bestimmten Voraussetzungen sehr gut selber stabilisieren. Beispielsweise gleichen sich Temperaturdifferenzen an der Wand in vertikaler Richtung schnell aus, indem an den wärmeren Stellen CO₂ verdampft und an den kälteren Stellen kondensiert. Dies führt zu einer ausgeglichenen Temperaturverteilung in vertikaler Richtung und einem gleichmässigen Wärmeentzug über die Höhe. Bedingung dafür ist, dass die Füllmenge an CO₂ genügend gross ist. Ein kleiner Flüssigkeitspool am Ende der Sonde sollte zum Ausgleich der Druckschwankungen vorhanden sein. Er darf jedoch nicht zu hoch sein, um die Wärmeübertragung zwischen Erdreich und CO₂ zu beeinträchtigen. Ist die Füllmenge genügend gross, so stellen sich die Verhältnisse in der Sonde im stationären Zustand so ein, dass der Flüssigkeitsfilm immer bis zum Pool hinunter reicht. Somit wird die ganze Sondenlänge gleichmässig belastet.

Bei einer CO₂-Erdwärmesonde wird der Umlauf des Arbeitsfluids CO₂ auch aufrecht erhalten, wenn die Wärmepumpe ausgeschaltet ist. Es findet somit in der Regenerationsphase ein aktiver vertikaler Energietransport statt. Bei einer Sole-Sonde erfolgt die Regeneration hingegen nur durch Wärmeleitung, wenn die Umwälzpumpe ausgeschaltet ist.

Die Simulationsresultate mit mehreren Einspritzstellen zeigen, dass das Konzept der Mehrfacheinspritzung hinsichtlich der Wärmeübertragung keinen Vorteil bringt. Der limitierende Schritt der Wärmeübertragung liegt bei der Wärmeleitung in der Erde. Demgegenüber ist der Wärmeübergangswiderstand in der Sonde (Filmverdampfung) vernachlässigbar klein, so dass verschiedene Filmkonfigurationen keine Rolle spielen. Durch die Reduktion des maximalen Filmmassenstroms bei der Mehrfacheinspritzung kann die Staugrenze theoretisch reduziert werden kann. Jedoch wird der Vorteil durch die Notwendigkeit eines Innenrohrs, welche den Strömungsquerschnitt verringert, wieder reduziert. Aufgrund dieser Tatsachen wird sich der zusätzliche konstruktive Aufwand kaum rechtfertigen lassen.

Die Parameterstudie zeigt weiter, dass bei grösserem Rohrdurchmesser eine höhere Kondensationstemperatur am Sondenkopf erreicht werden kann. Dies gilt jedoch nur für den Fall, dass nur ein Rohr verwendet wird. Eine Konfiguration mit z.B. vier kleineren Rohren kann mit dem zweidimensionalen Modell nicht abgebildet werden. Ein tieferes Bohrloch ist vorzuziehen, da damit wärmere Schichten erschlossen werden können.

Die Temperatur am Sondenkopf ist relevant für die Wärmeübertragung im Verdampfer der Wärmepumpe und somit für deren Energieeffizienz. Die vergleichenden Simulationen mit einer Sole-Sonde haben ergeben, dass die Temperatur in einer CO₂-EWS in etwa zwischen der Vor- und Rücklauftemperatur der Sole-Sonde liegt. Wie bereits in anderem Zusammenhang gesehen, ist vor allem die Wärmeleitung im Erdreich limitierend. Ein grosser Vorteil der CO₂-EWS ist jedoch die Wärmeübertragung an das Kältemittel der Wärmepumpe (Kondensator CO₂ / Verdampfer Kältemittel). Der Wärmeübergang bei der Kondensation von CO₂ ist viel effizienter als bei der Sole ohne Phasenwechsel. Das führt dazu, dass die Verdampfungstemperatur der Wärmepumpe bei der CO₂-EWS um ca. 5°C höher liegt. Zusammen mit dem Wegfall der Umwälzpumpe dürfte sich dies in einer um ca. 15 – 25% höheren Arbeitszahl niederschlagen. Konkrete Zahlen aus der Praxis sind zwar noch rar, bestätigen aber die hohen Erwartungen.

Der obige Vergleich mit einer Sole-Sonde beruht auf einer kurzfristigen Simulation (3 Tage). Dabei kommt das Verhalten der beiden unterschiedlichen Sondentypen in der Regenerationsphase kaum zum Tragen. Es hat sich bei den Simulationen gezeigt, dass bei einer CO₂-EWS der Umlauf des Arbeitsfluids CO₂, getrieben durch den Anstieg der Erdtemperatur gegen unten, auch aufrecht erhalten wird, wenn die Wärmepumpe ausgeschaltet ist. Es findet also in der Regenerationsphase ein aktiver vertikaler Energietransport statt. Bei einer Sole-Sonde erfolgt die Regeneration hingegen nur

durch Wärmeleitung, wenn die Umwälzpumpe ausgeschaltet ist. Dieser Effekt könnte die Arbeitszahl noch weiter zugunsten der CO₂-EWS verschieben.

Bei der Auslegung einer CO₂-EWS ist darauf zu achten, dass der Rohrdurchmesser gemäss der Staugrenzenkorrelation auf die Entzugsleistung abgestimmt ist. Dabei kann die Leistung auch auf mehrere kleinere Rohre aufgeteilt werden, wie dies M-Tec Mittermayr praktiziert. Wie gross der Rohrdurchmesser sein kann, wird auch durch das Material und dessen Biegsamkeit bestimmt.

Insgesamt bestätigt diese Studie die hohen Erwartungen bezüglich Energieeffizienz einer CO₂-EWS. Die Erfahrungen aus der Praxis gehen in die gleiche Richtung und liefern auch keine Anhaltspunkte zu grösseren Schwierigkeiten in Betrieb und Unterhalt der Anlagen. Ein Nachteil, vor allem im Zusammenhang mit Grossprojekten, ist jedoch, dass eine CO₂-EWS keine Kühlfunktion übernehmen kann. Theoretisch können zwar Hybridsonden eingesetzt werden, jedoch werden dadurch die Installationskosten nahezu verdoppelt. Der sinnvolle Einsatzbereich liegt daher eher bei Einfamilienhäusern.

Um die Verbreitung von CO₂-EWS in der Schweiz voran zu treiben wird es notwendig sein, den Bau von Referenzanlagen zu fördern und Betriebsdaten zu veröffentlichen. Obwohl auch auf theoretischer Seite noch Vieles möglich wäre, wird es daher als wichtiger erachtet, die Forschungsarbeit an einer Demonstrationsanlage fortzusetzen. Die Modellvorstellungen können anhand solcher Messungen überprüft und weiterentwickelt werden.

7 Symbolverzeichnis

7.1 Formelzeichen

A	Querschnittsfläche der EWS
a	Temperaturleitfähigkeit
b	Verteilungsfaktor bei Rinnalströmung
c_p	Spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck
c_w	Wallis-Konstante zur Staugrenzenberechnung
c_K	Kutateladze-Konstante zur Staugrenzenberechnung
D	Innendurchmesser des Aussenrohrs
D_H	Hydraulischer Durchmesser des Strömungsquerschnitts
d	Aussendurchmesser des Innenrohrs
g	Erdbeschleunigung
H	Höhe des Erdmodells
h	Poolhöhe
Δh_v	Spezifische Verdampfungsenthalpie
I	Anzahl Gitterpunkte in radialer Richtung
J	Anzahl Gitterpunkte in vertikaler Richtung
j^*	Dimensionslose Strömungsgeschwindigkeit (nach Wallis)
K	Dimensionslose Strömungsgeschwindigkeit (nach Kutateladze)
L	Sondenlänge
M_{CO_2}	Molmasse CO ₂
m	Gesamtmasse an CO ₂
\dot{m}	Massenstrom
$d\dot{m}$	infinitesimaler Massenstrom
$d\dot{m}_v$	infinitesimaler Verdampfungsmassenstrom
N	Anzahl Einspritzstellen
p	Druck
p_0	Druck am Sondenkopf
\dot{Q}_{Film}	Wärmestrom, welcher im Bereich des Films übertragen wird
\dot{Q}_{Pool}	Wärmestrom, welcher im Bereich des Pools übertragen wird
\dot{Q}_{tot}	Wärmestrom, welcher der Erde total entzogen wird
\dot{Q}_v	Wärmestrom, welcher beim Verdampfer der Wärmepumpe übertragen wird
$d\dot{Q}$	Infinitesimaler Wärmestrom
\dot{q}	Wärmestromdichte
\dot{q}_0	Referenzwert für Wärmestromdichte
\dot{q}_B	Basiswärmestromdichte
R	Radius Erdmodell
r	Radiale Koordinate
Δr	Abstand zwischen zwei Gitterpunkten in r-Richtung
s_E	Einspritzterm
T	Temperatur
T_0	Temperatur an der Erdoberfläche
T_s	Siedetemperatur

T_E	Erdreichtemperatur
T_w	Wandtemperatur
ΔT	Temperaturdifferenz
t	Zeitkoordinate
Δt	Zeitschritt
V	Volumen
z	Vertikale Koordinate
dz	Infinitesimale Höhe
Δz	Abstand zwischen zwei Gitterpunkten in z-Richtung

7.2 Griechische Symbole

α	Wärmeübergangskoeffizient
α_0	Referenzwert für Wärmeübergangskoeffizient
Γ	Berieselungsdichte
γ	Gitterskalierungsfaktor
δ	Filmdicke
η	Dynamische Viskosität
θ	Benetzungswinkel
λ	Wärmeleitfähigkeit
ρ	Dichte
ρ'	Dichte Flüssigkeit auf der Siedelinie
ρ''	Dichte Gas auf der Taulinie
σ	Oberflächenspannung

7.3 Indizes

EWS	Erdwärmesonde
F	Flüssigphase, Film
G	Gasphase
i	Index für Gitterpunkt in r-Richtung
j	Index für Gitterpunkt in z-Richtung
min	Minimal
max	Maximal
n	Index für diskreten Zeitschritt
0	Anfangszustand

7.4 Dimensionslose Kennzahlen

Bo	Bond-Zahl
Boi	Boiling-Zahl
Ka	Kapitza-Zahl
Nu	Nusselt-Zahl
Nu_z	Konvektive Nusselt-Zahl
Pr	Prandtl-Zahl
Re	Reynolds-Zahl

7.5 Abkürzungen

bc	Boundary Condition, Randbedingung
BFE	Bundesamt für Energie
CO ₂	Kohlendioxid
COP	Coefficient Of Performance
EWS	Erdwärmesonde
FDM	Finite Differenzen Methode
ID	Innendurchmesser
JAZ	Jahresarbeitszahl
WP	Wärmepumpe

8 Literaturverzeichnis

1. Peterlunger, A., M. Ehrbar, et al., *Schlussbericht Pumpenlose Erdwärmesonde, Phase 1: Potentialabklärung, Machbarkeitsstudie energetisch und wirtschaftlich*. 2004, Bundesamt für Energie.
2. Minder, R.und H. Gorhan, *Nutzung der Erdwärme: Überblick, Technologie, Visionen*. 2006, Bundesamt für Energie.
3. Stohler, F., *Wattwerk: Produziert mehr Energie als selber gebraucht wird*. Spektrum Gebäude Technik, 2004(3): p. 29-31.
4. Rieberer, R., *Naturally circulating probes and collectors for ground-coupled heat pumps*. International Journal of Refrigeration-Revue Internationale Du Froid, 2005. **28**(8): p. 1308-1315.
5. Wenzel, B., *Erdwärme-Projekt "CO2-Erdsonde-Bensheim"*. Geothermische Energie, 2007. **55**: p. 19-20.
6. Kruse, H., D. Gebhart, und H. Rüssmann, *FKW - CO2-Erdwärmerohr für Geothermische Wärmepumpen - Betriebsverhalten im Vergleich zur Sole-Sonde*, in *Der Geothermiekongress 2008*. 2008: Karlsruhe. p. 236-249.
7. Kruse, H., W. Stiller, und H. Rüssmann, *Stand der Entwicklung und Markteinführung des FKW-CO2-Erdwärmerohrs*. Geothermische Energie, 2008. **17**(1): p. 18-22.
8. Wagner, R., *Einsatz von Direktverdampfersonden beim Sanierungswohnungsbau*, in *Der Geothermiekongress 2008*. 2008: Karlsruhe. p. 250-259.
9. Fukuda, K., K. Nakagawa, et al., *Thermal characteristics of double-tube two-phase thermosiphon*. Heat Transfer - Japanese Research, 1992. **21**(2): p. 187-198.
10. Span, R.und W. Wagner, *A new equation of state for carbon dioxide covering the fluid region from the triple-point temperature to 1100 K at pressures up to 800 MPa*. Journal of Physical and Chemical Reference Data, 1996. **25**(6): p. 1509-1596.
11. Scalabrin, G., P. Marchi, et al., *A reference multiparameter thermal conductivity equation for carbon dioxide with an optimized functional form*. Journal of Physical and Chemical Reference Data, 2006. **35**(4): p. 1549-1575.
12. Fenghour, A., W.A. Wakeham, und V. Vesovic, *The viscosity of carbon dioxide*. Journal of Physical and Chemical Reference Data, 1998. **27**(1): p. 31-44.
13. Adib, T.A.und J. Vasseur, *Bibliographic analysis of predicting heat transfer coefficients in boiling for applications in designing liquid food evaporators*. Journal of Food Engineering, 2008. **87**(2): p. 149-161.
14. Chun, K.R.und R.A. Seban, *Heat Transfer to Evaporating Liquid Films*. Journal of Heat Transfer, 1971. **93**(4): p. 391-.
15. Krupiczka, R., A. Rotkegel, und Z. Ziobrowski, *Heat transfer to evaporating liquid films within a vertical tube*. Chemical Engineering and Processing, 2002. **41**(1): p. 23-28.
16. Tien, C.L.und K.S. Chung, *Entrainment Limits in Heat Pipes*. Aiaa Journal, 1979. **17**(6): p. 643-646.
17. Wallis, G.B., *One-dimensional two-phase flow*. 1969, New York etc.: McGraw-Hill.
18. Kutateladze, S.S., *Elements of the hydrodynamics of gas-liquid systems*. Fluid Mechanics Soviet Research, 1972. **1**(4): p. 29-68.

19. Schmuki, P. und M. Laso, *On the Stability of Rivulet Flow*. Journal of Fluid Mechanics, 1990. **215**: p. 125-143.
20. Hartley, D.E. und W. Murgatroyd, *Criteria for the break-up of thin liquid layers flowing isothermally over solid surfaces*. International Journal of Heat and Mass Transfer, 1964. **7**(9): p. 1003-1015.
21. El-Genk, M.S. und H.H. Saber, *Minimum thickness of a flowing down liquid film on a vertical surface*. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2001. **44**(15): p. 2809-2825.
22. Morison, K.R., Q.A.G. Worth, und N.P. O'Dea, *Minimum wetting and distribution rates in falling film evaporators*. Food and Bioproducts Processing, 2006. **84**(C4): p. 302-310.
23. Nusselt, W., *The surface condensation of water vapour*. Zeitschrift Des Vereines Deutscher Ingenieure, 1916. **60**: p. 541-546.
24. Ingenieure, V.D., *VDI-Wärmeatlas*. VDI. 2006: Springer.
25. Özisik, M.N., *Finite difference methods in heat transfer*. 1994: CRC Press.
26. Kohl, T. und R.J. Hopkirk, "FRACTure"-A Simulation Code for Forced Fluid Flow and Transport in Fractured, Porous Rock. Geothermics, 1995. **24**(3): p. 333-343.
27. Erb, M., P. Hubacher, und M. Ehrbar, *Feldanalyse von Wärmepumpenanlagen FAWA 1996-2003*. 2004, Bundesamt für Energie.
28. Rieberer, R., K. Mittermayr, und H. Halozan. CO₂ Heat Pipe for Heat Pumps. in *5th IIR-Gustav Lorentzen Conference on Natural Working Fluids*. 2002. Guangzhou, China.

A1 Details zum Berechnungsmodell

A1.1 Iterationsverfahren zur Bestimmung des Sondendrucks

Der Druckzustand in der Sonde wird iterativ mit der Sekantenmethode berechnet. Aus der Funktion $\dot{Q}_{tot}(p)$ wird der Punkt ermittelt, bei welchem \dot{Q}_{tot} der vorgegebenen Verdampferleistung \dot{Q}_V entspricht (vergleiche Gleichung (29)). Der Druck p bezeichnet hier den Druck am Sondenkopf. Die Sekantenmethode ist ein lineares Interpolationsverfahren, bei welchem aus zwei Startwerten p_0 und p_1 jeweils eine neue Näherung p_2 berechnet wird. Für den nächsten Schritt wird jeweils die neue Näherung dazugenommen (p_2 wird zu p_1 , p_1 wird zu p_0), solange bis die Differenz zwischen den beiden Werten unterhalb der Toleranzgrenze liegt. Die Berechnung erfolgt nach dem Schema:

$$G(p) = \dot{Q}_{tot}(p) - \dot{Q}_V = 0 \quad (37)$$

$$p_2 = \frac{p_0 \cdot G(p_1) - p_1 \cdot G(p_0)}{G(p_1) - G(p_0)} \quad (38)$$

Das Abbruchkriterium setzt sich zusammen aus der absoluten Toleranz $ATOL$ und der relativen Toleranz $RTOL$:

$$|p_2 - p_1| < |p_1| \cdot RTOL + ATOL \quad (39)$$

A1.2 Crank-Nicolson-Verfahren zur Lösung der Wärmeleitungsgleichung

Zur Berechnung der Temperaturverteilung im Erdreich muss die Wärmeleitungsgleichung (33) gelöst werden. Dies wurde mit der Finiten Differenzen Methode (FDM), mit dem sogenannten Crank-Nicolson Verfahren, gelöst. Die Diskretisierung erfolgte wie in Abb. 8-2 mit Index i in r -Richtung, Index j in z -Richtung und Index n für die Zeit t . In r -Richtung wurden die Abstände linear skaliert (Abb. 8-1), d.h. die Abstände vergrössern sich gegen aussen:

$$\Delta r_{i+1} = \gamma \cdot \Delta r_i \quad (40)$$

Das i -te Element kann somit in Abhängigkeit vom ersten berechnet werden:

$$\Delta r_i = \gamma^{i-1} \cdot \Delta r_1 \quad (41)$$

$$r_i = r_1 + \Delta r_1 \cdot \left(\frac{1 - \gamma^{i-1}}{1 - \gamma} \right) \quad (42)$$

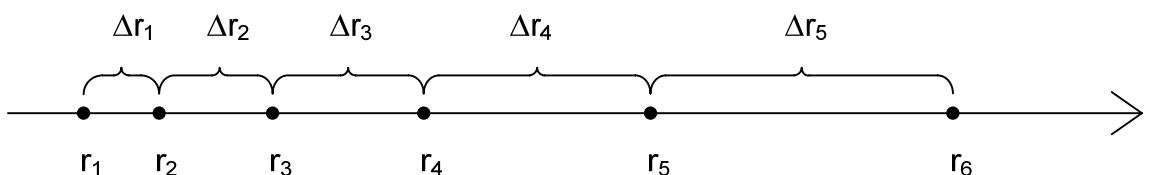


Abb. 8-1: Lineare Skalierung der Gitterpunkte in r -Richtung.

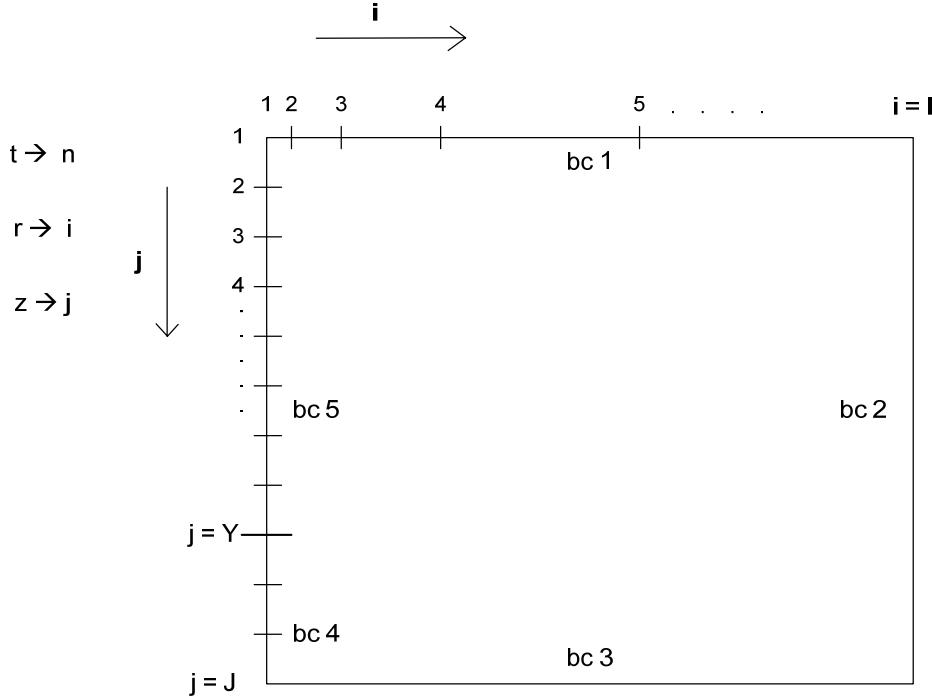


Abb. 8-2: Diskretisierung des Modells.

Die zu lösende Finite Differenzen Gleichung lautet

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} = \theta \cdot \left[\frac{T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n+1}}{\Delta r_i} - \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta r_i \cdot \Delta r_{i-1}} + \frac{1}{2r_i} \left(\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta r_{i-1}} + \frac{T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n+1}}{\Delta r_i} \right) + \frac{T_{i,j-1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j+1}^{n+1}}{\Delta z^2} \right] + (1-\theta) \cdot \left[\frac{T_{i+1,j}^n - T_{i,j}^n}{\Delta r_i} - \frac{T_{i,j}^n - T_{i-1,j}^n}{\Delta r_i \cdot \Delta r_{i-1}} + \frac{1}{2r_i} \left(\frac{T_{i,j}^n - T_{i-1,j}^n}{\Delta r_{i-1}} + \frac{T_{i+1,j}^n - T_{i,j}^n}{\Delta r_i} \right) + \frac{T_{i,j-1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j+1}^n}{\Delta z^2} \right] \quad (43)$$

Umformung dieser Gleichung ergibt:

$$(uA + 1)T_{i,j}^{n+1} + (uB)T_{i-1,j}^{n+1} + (uC)T_{i+1,j}^{n+1} + (uD)T_{i,j-1}^{n+1} + (uD)T_{i,j+1}^{n+1} = (-vA + 1)T_{i,j}^n + (-vB)T_{i-1,j}^n + (-vC)T_{i+1,j}^n + (-vD)T_{i,j-1}^n + (-vD)T_{i,j+1}^n \quad (44)$$

mit

$$u = a \cdot \Delta t \cdot \theta \quad (45)$$

$$v = a \cdot \Delta t \cdot (1-\theta) \quad (46)$$

$$A(r_i, \Delta r_i) = \frac{1}{\Delta^2 r_i} + \frac{1}{\Delta r_i \cdot \Delta r_{i-1}} - \frac{1}{2r_i \cdot \Delta r_{i-1}} + \frac{1}{2r_i \cdot \Delta r_i} + \frac{2}{\Delta z} \quad (47)$$

$$B(r_i, \Delta r_i) = -\frac{1}{\Delta r_i - \Delta r_{i-1}} + \frac{1}{2r_i \cdot \Delta r_{i-1}} \quad (48)$$

$$C(r_i, \Delta r_i) = -\frac{1}{\Delta^2 r_i} - \frac{1}{2r_i \cdot \Delta r_i} \quad (49)$$

$$D = -\frac{1}{\Delta z^2} \quad (50)$$

Gleichung (44) gilt für alle Punkte im Innern des betrachteten Gebiets. Es ist zu beachten, dass die Koeffizienten A, B und C nicht konstant sind. Unter Einbezug der Randbedingungen (Abschnitt 3.3) können die Gleichungen für die Randpunkte abgeleitet werden.

Bc2

Am äusseren Rand des Gebiets ($i=I$) ist die Temperatur vorgegeben und entspricht somit der Anfangsbedingung:

$$T_{i,j}^{n+1} = T_{i,j}^n = T_{i,j}^{t=0} \quad (51)$$

Bc3

Am unteren Rand ($j=J$) ist die Wärmestromdichte \dot{q}_b vorgegeben. Es gilt für den Zeitschritt n und analog dazu für $n+1$:

$$-\lambda \frac{T_{i,j+1}^n - T_{i,j-1}^n}{2\Delta z} = \dot{q}_b \quad \text{bzw.} \quad -\lambda \frac{T_{i,j+1}^{n+1} - T_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta z} = \dot{q}_b \quad (52)$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen können die fiktiven Punkte $T_{i,j+1}^n$ und $T_{i,j-1}^{n+1}$ in Gleichung (44) eliminiert werden. Die FDM Gleichung für Rand 3 lautet somit:

$$\begin{aligned} & (uA + 1)T_{i,j}^{n+1} + (uB)T_{i-1,j}^{n+1} + (uC)T_{i+1,j}^{n+1} + (2uD)T_{i,j-1}^{n+1} - uD \frac{2\Delta z \cdot \dot{q}_b}{\lambda} \\ & = (-vA + 1)T_{i,j}^n + (-vB)T_{i-1,j}^n + (uC)T_{i+1,j}^n + (-2vD)T_{i,j-1}^n + vD \frac{2\Delta z \cdot \dot{q}_b}{\lambda} \end{aligned} \quad (53)$$

Bc1

Der obere Rand ($j=1$) ist isoliert, d.h. $\dot{q} = 0$. Somit ist

$$T_{i,j-1}^n = T_{i,j+1}^n \quad \text{bzw.} \quad T_{i,j-1}^{n+1} = T_{i,j+1}^{n+1} \quad (54)$$

Und $T_{i,j-1}^n$ bzw. $T_{i,j-1}^{n+1}$ können eliminiert werden.

$$\begin{aligned} & (uA + 1)T_{i,j}^{n+1} + (uB)T_{i-1,j}^{n+1} + (uC)T_{i+1,j}^{n+1} + (2uD)T_{i,j+1}^{n+1} \\ & = (-vA + 1)T_{i,j}^n + (-vB)T_{i-1,j}^n + (-vC)T_{i+1,j}^n + (-2vD)T_{i,j+1}^n \end{aligned} \quad (55)$$

Bc5

An der Grenze zur EWS ($i=1, j<Y$) ist die Wärmestromdichte \dot{q}_{EWS} vorgegeben. Es gilt

$$-\lambda \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{T_{i,j}^n - T_{i-1,j}^n}{\Delta r_{i-1}} + \frac{T_{i+1,j}^n - T_{i,j}^n}{\Delta r_i} \right) = \dot{q}_{EWS} \quad \text{analog für } n+1 \quad (56)$$

Daraus ergibt sich durch Elimination von $T_{i-1,j}^n$ und $T_{i+1,j}^{n+1}$

$$\begin{aligned} & \left[(uA + 1) + (uB) \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \right] T_{i,j}^{n+1} + \left[\frac{uB}{\gamma} + (uC) \right] T_{i+1,j}^{n+1} + (uD) T_{i,j-1}^{n+1} + (uD) T_{i,j+1}^{n+1} + (uB) \frac{2\Delta r_{i-1} \cdot \dot{q}_{EWS}}{\lambda} \\ &= \left[(-vA + 1) + (-vB) \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \right] T_{i,j}^n + \left[-\frac{vB}{\gamma} - (vC) \right] T_{i+1,j}^n + (-vD) T_{i,j-1}^n + (-vD) T_{i,j+1}^n - (vB) \frac{2\Delta r_{i-1} \cdot \dot{q}_{EWS}}{\lambda} \end{aligned} \quad (57)$$

Bc4

Es verbleibt noch der innere Rand unterhalb der EWS ($i=1, j>Y$). Vereinfachend wird angenommen, dass es sich um die Symmetriearchse handelt. Die Berechnung erfolgt analog zu Bc5, aber für \dot{q}_{EWS} wird Null eingesetzt.

$$\begin{aligned} & \left[(uA + 1) + (uB) \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \right] T_{i,j}^{n+1} + \left[\frac{uB}{\gamma} + (uC) \right] T_{i+1,j}^{n+1} + (uD) T_{i,j-1}^{n+1} + (uD) T_{i,j+1}^{n+1} \\ &= \left[(-vA + 1) + (-vB) \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \right] T_{i,j}^n + \left[-\frac{vB}{\gamma} - (vC) \right] T_{i+1,j}^n + (-vD) T_{i,j-1}^n + (-vD) T_{i,j+1}^n \end{aligned} \quad (58)$$